

青年数学叢書

最短綫

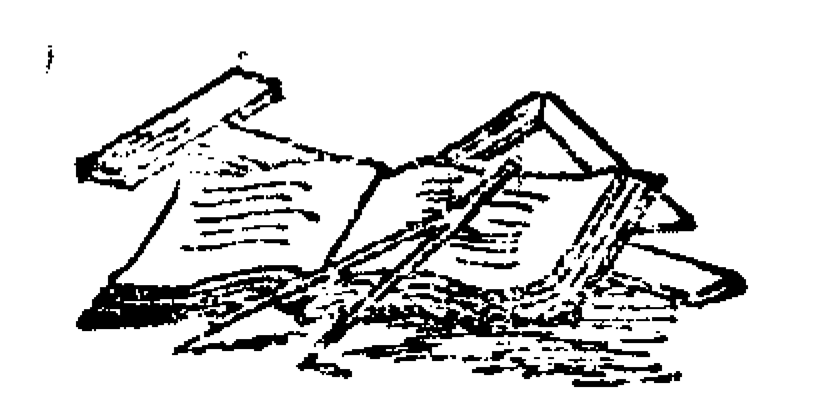
柳斯捷尔尼克著

中国青年出版社

青年数学叢書

最 短 綫

柳斯捷尔尼克著
高 徹 譯



中国青年出版社
1957年·北京

內 容 提 要

一只蒼蝇要想从一道墻壁上的点A 爬到鄰近一道墻壁上的点B．怎样爬路程最短？用一定長短的一道籬笆，怎样圍所包含的面积最大？解决这一类問題，在数学上是屬于变分学的范圍的．这本小册子完全用初等数学作基础，来向中等程度的讀者介紹变分学．作者把一些数学問題联系到物理問題上去，証明虽然不是很严格的，却很簡單而直观，使讀者很容易領会，而且对于讀者发展这方面的数学才能也有帮助．

Л. А. ЛЮСТЕРНИК
КРАТЧАЙШИЕ ЛИНИИ
ГИЗТЕХ
МОСКВА, 1955

目　次

原　　序

在这本小册子里，我們从初等数学的观点来研究一系列的所謂变分問題．这些問題研究一些和曲綫有关的量，并且寻求那些使这种量达到它的极大值或极小値的曲綫．下列的問題就是例子：在某个面上連接兩定点的一切曲綫当中求出最短的；在平面上有一定長度的閉曲綫当中求出包圍最大面积的曲綫，等等．

本書的材料基本上曾經由作者在国立莫斯科大学中学数学小組上講过．第一講（第1-10节）的內容基本上和1940年出版的作者所著的小册子“短程綫”的內容一致．

我只假定讀者熟悉初等数学課程．第一章完全是帶初等数学性質的，其余几章也不要求專門知識，不过要求对数学課程有比較好的素养，并且善于思索．

本書的全部材料可以看成是变分学的初步介紹（所謂变分学就是数学当中系統地研究有关求泛函数的极大极小問題的一个分支）．变分学不屬于比較精簡的例如工科大学里所学的“高等数学”課程范圍之內．然而对于开始学习“高等数学”課程的人来說，我們認为在事先稍微多看一些也不是毫无用处的．

对于熟悉初等数学分析的讀者来說，要把本書里所叙述

的一些不严格的定义和論証改得很严格（关于这方面的闡釋他在那些用小号字印出的章节里可以經常遇到），当不会有什么困难；例如，不应当說微小的量和它的近似等式（大致等于），而应当說无穷小量和它的等价。假若那些要求更高的讀者終究对于这里的討論里所容許的严格程度和邏輯上的完善程度感到不滿足，那末可以对他說明，这需要有一些数学分析的基本概念的邏輯上的磨練，就象他在大学分析課程里所遇到的。沒有这样的磨練，分析里象变分学这样的部分就不可能作严格的和系統的叙述。

数学分析产生了有力的分析器械，它有时自动地解决了許多困难問題。但在掌握数学的所有阶段当中，特别重要的是看出所要解决的問題的簡單几何意义和物理意义。要学会象数学家們所說的“在手上”解决問題，就是說，要学会去发現那些虽然并不严格、却很簡單而直观的証明。

假若这本小册子多少对于讀者发展这方面的数学才能有帮助，著者就認为他編写本書并沒有白費气力。

柳斯捷尔尼克

第 一 講

第 一 章

最簡單的面上的最短綫

一 多面角的面上的最短綫

1. 二面角上的最短綫 讀者当然知道，連接平面上兩点的所有綫当中，最短的綫是直綫。

我們現在来研究任意一个面上的兩点 A 和 B；它們可以用这面上的无数多条綫来連接。但是这些綫当中哪一条最短？換句話說，要想沿这个面从 A 点到 B 点，应該怎样走路程最短？

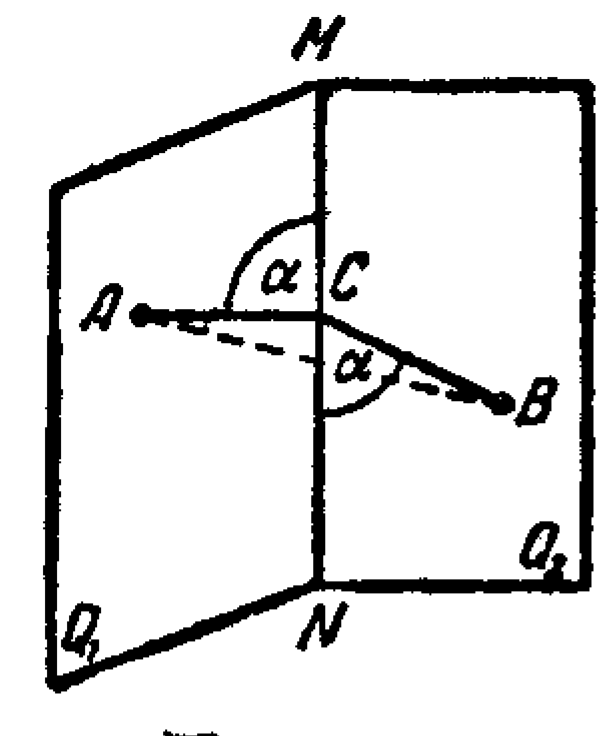


图 1.

我們先就一些最簡單的面来解这一个問題。我們从这样的一个問題开始：給定一个二面角①，它的兩面是 Q_1 和 Q_2，棱是 MN；在这兩面上給定兩点：Q_1 上的点 A 和 Q_2 上的点 B（图 1）。点 A 和点 B 可以用无数多条在这二面角的面 Q_1 和 Q_2 上的綫連接起来。我們要在这些綫当中求出最短的一条。

若二面角等于平角（180°），那末面 Q_1 和 Q_2 当中的一面

① 图 1 上所画的只是这无限伸延的二面角的一部分。

是另一面的延續(也就是合成一个平面),因而所寻求的最短綫也就是連接点 A 和点 B 的直綫段 AB。但若这二面角不等于平角,面 Q_1 和 Q_2 就不可能一面是另一面的延續,因而直綫段 AB 就不在这兩面上。我們把这兩面当中的一面繞着直綫 MN 轉,使这兩面变成一面是另一面的延續,換句話說,把这二面角展在一个平面上(图 2)。面 Q_1 和 Q_2 变成了半平面 Q_1' 和 Q_2'。直綫 MN 变成了分开 Q_1' 和 Q_2' 的直綫 $M'N'$;点 A 和 B 变成了点 A' 和 B'(A' 落在 Q_1' 上,B' 落在 Q_2' 上);在二面角的面上連接 A、B 二点的每一条綫也都变成了我們的平面上連接 A'、B' 兩点的和原来同样長短的綫。二面角的面上連接 A、B 兩点的最短綫就变成了平面上連接 A'、B' 兩点的最短綫,也就是变成了直綫段 $A'B'$。这綫段交直綫 $M'N'$ 于某一点 C',角 $A'C'M'$ 和 $N'C'B'$ 是对頂角,所以相等(图 2)。它們每一个的大小記作 α。

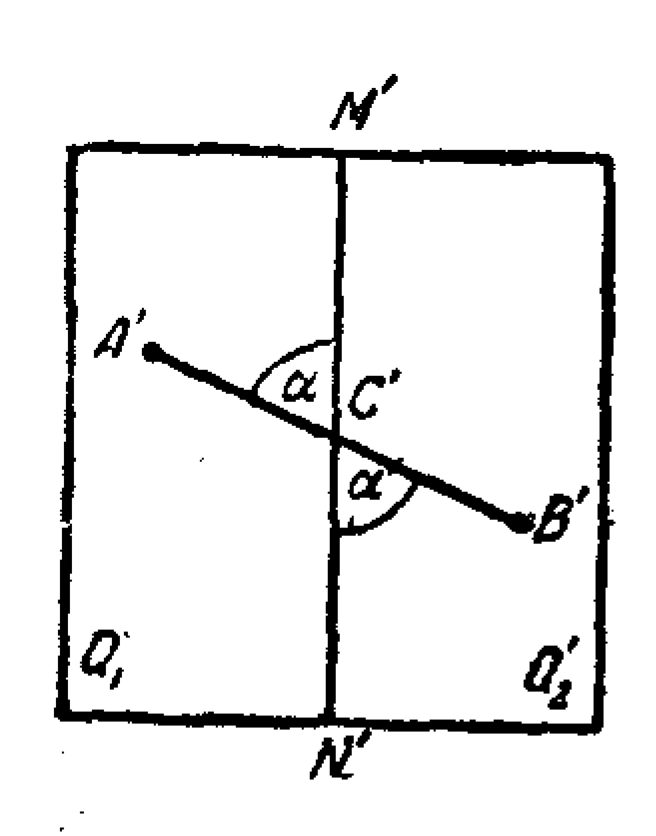


图 2.

我們現在把 Q_1' 和 Q_2' 繞 $M'N'$ 轉,使得又重新得到原来的二面角。半平面 Q_1' 和 Q_2' 再变成这二面角的面 Q_1 和 Q_2,$M'N'$ 变成棱 MN,而点 A' 和 B' 变成点 A(在面 Q_1 上)和点 B(在面 Q_2 上),直綫段 $A'B'$ 就变成在这二面角的面上連接 A、B 兩点的最短綫。这条最短綫显然就是折綫 ACB,它的 AC 那一段在面 Q_1 上,CB 这一段在面 Q_2 上。显然,由兩个互等的角 $A'C'M'$ 和 $N'C'B'$ 所变成的角 ACM 和 NCB 仍旧等于 α,也就是說它們仍旧相等。因此,在二面角的面上連接

它上面的(不在同一面上的)兩点 A 和 B 的綫当中最短的是这样的一条折綫 ACB，它的頂点 C 在棱 MN 上，而它的兩条边和棱所作成的兩个角 ACM 和 NCB 相等.

我們有时給現在所討論的这个問題帶上一点半开玩笑的性質. 一只蒼蝇要想从一道墻壁上的点 A 爬到鄰近一道墻壁上的点 B. 假若它要沿墻壁从点 A 爬过最短的路到达点 B，試問它应該怎样爬. 我們現在要得出解答已經不難了.

2. 多面角面上的最短綫 我們現在来討論比較复杂一点的情形. 給定一个多面角的面(图3)，它是由几个面 Q_1、Q_2、Q_3、Q_4……Q_n 和棱 M_1N_1、M_2N_2、M_3N_3……$M_{n-1}N_{n-1}$ 所組成(图3所画的是 $n=4$ 的情形). 在这多面角的兩个不同的面上(比如 Q_1 和 Q_4 上)給定兩点 A 和 B. 現在要求出这多面角的面上連接点 A 和 B 的最短綫.

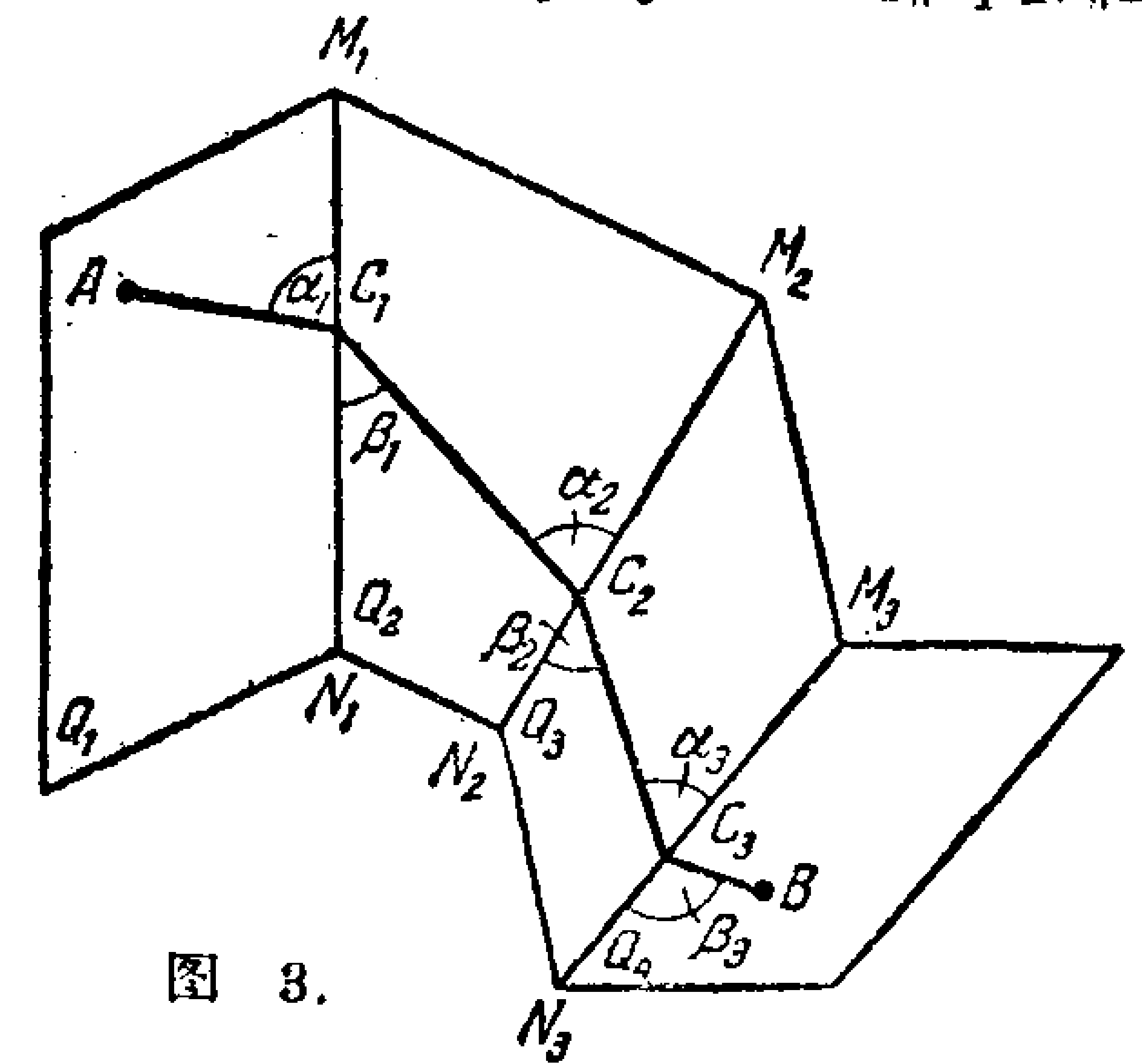


图 3.

假設最短的是綫 AB，又設这条綫通过面 Q_1、Q_2、Q_3、Q_4. 我們現在把这些面所組成的这一部分多面角展在一个平面上(图4). 这时候这些面变成了这平面上的多边形 Q_1'、Q_2'、Q_3'、Q_4'，而把面 Q_1、Q_2、Q_3、Q_4 兩兩接連起来的棱 M_1N_1、M_2N_2、M_3N_3 变成了多边形 Q_1'、Q_2'、Q_3'、Q_4' 的边 $M_1'N_1'$、$M_2'N_2'$、$M_3'N_3'$，这些多边形就是由它們兩兩連接在一起的. 点 A 和 B 变成了平面上的点

A'和B'，而在多面角的面被展开的这一部分上連接A、B兩点的綫也变成平面上連接A'、B'兩点的綫．連接A、B兩点的綫当中最短的綫也就变成連接A'、B'兩点的最短的平面上的綫，也就是变成了直綫段$A'B'$①．在这里，我們完全重复先前的論証：

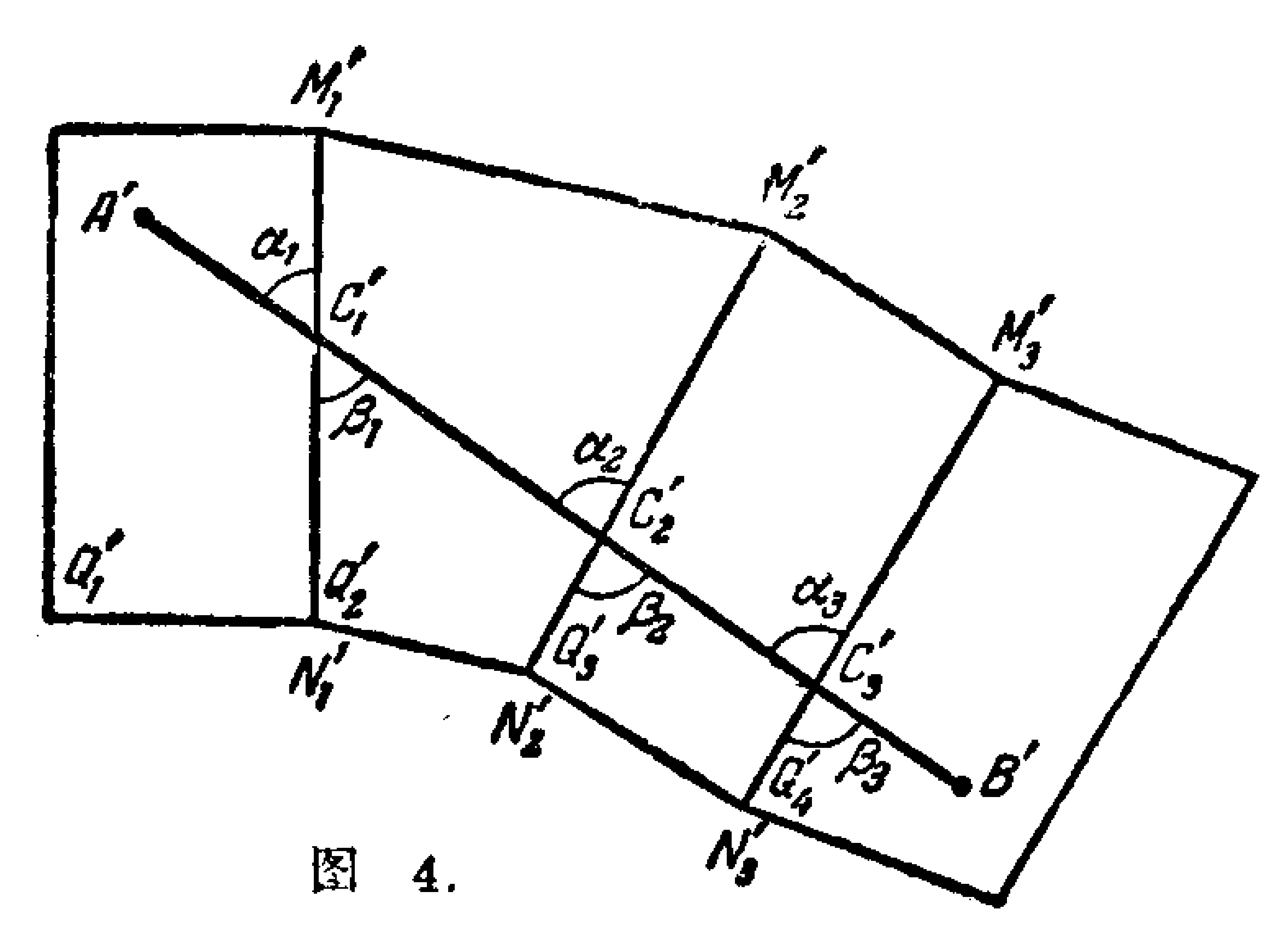


图 4.

由直綫$A'B'$和边$M_1'N_1'$所作成的对頂角α_1和β_1相等；同理，由直綫$A'B'$和边$M_2'N_2'$、$M_3'N_3'$所作成的对頂角α_2和β_2、α_3和β_3也兩兩相等(图4)．

假若重新把構成我們这些多边形的这一部分平面彎折成多面角的面，使得多边形Q_1'重新变成面Q_1，多边形Q_2'重新变成面Q_2，多边形Q_3'变成面Q_3，Q_4'变成Q_4，那末点A'和B'就变成点A和B，而直綫段$A'B'$变成綫$\overset{\frown}{AB}$，变成多面角的面上連接A、B兩点的最短綫．这条最短綫是一条折綫，它的頂点在多面角的面的一些棱M_1N_1、M_2N_2、M_3N_3上．而由它的相接的兩条边和棱所作成的角α_1和β_1（以及α_2和β_2、α_3和β_3)相等．

3. 棱柱側面上的最短綫 在图5上画的是一个棱

① $A'B'$穿过这些多边形的别条边的情形，我們这里不討論了．

柱[1]，和連接这棱柱上不在同一側面上的兩点 A 和 B 的最短綫。这最短綫是一条折綫，它的頂点是棱柱的棱上的 C_1、C_2、C_3，而它的相接的兩边和这兩边的公共頂点所在的一条棱所作成的角，由前所說，是互等的：

$$\alpha_1=\beta_1,\quad \alpha_2=\beta_2,\quad \alpha_3=\beta_3,\cdots\cdots$$

但除此而外，我們还有 $\beta_1=\alpha_2$。

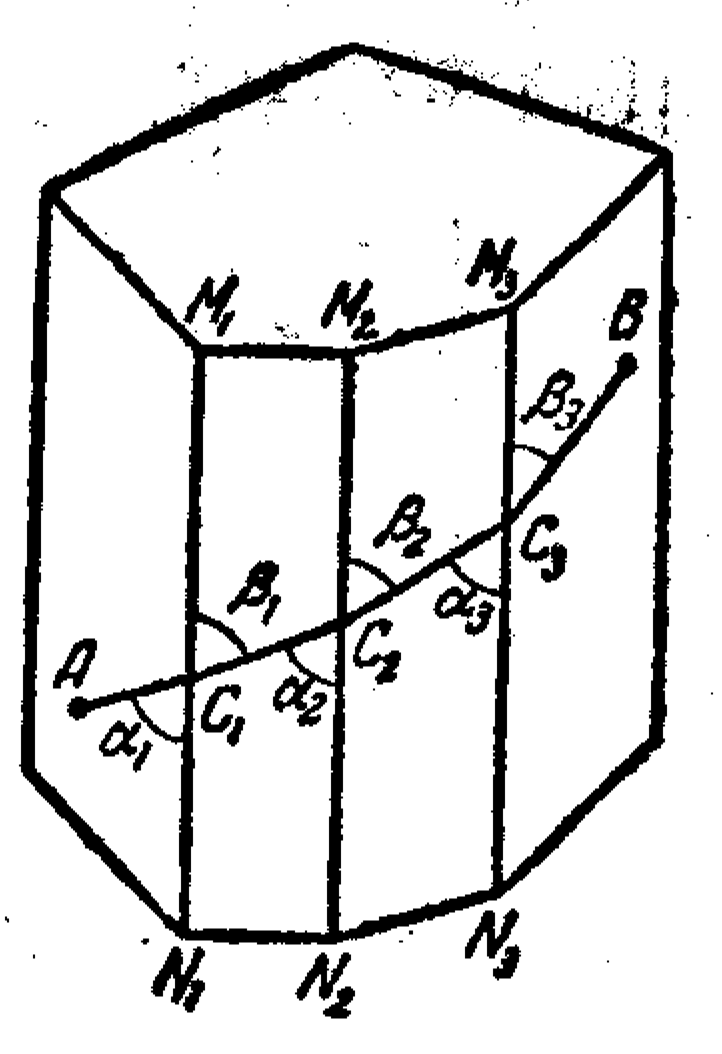


图 5.

实际上，这兩个角是平行綫 M_1N_1、M_2N_2 和截綫 C_1C_2 所成的內錯角。同理，$\beta_2=\alpha_3$。因此，我們有

$$\alpha_1=\beta_1=\alpha_2=\beta_2=\alpha_3=\beta_3=\cdots\cdots$$

換句話說，棱柱側面上的最短折綫 AB 的各边和棱柱的各个棱所作成的角互等。

4. 棱錐的面上的最短綫

設在頂点是 O 的棱錐[2]的兩个側面上給定了兩点 A 和 B（图 6）。这兩点可以在錐面上用无数多条綫連接起来，这些綫当中有一条最短的綫 $\overset{\frown}{AB}$。根据前面所說，綫 $\overset{\frown}{AB}$ 是一条折綫，它的頂点 C_1、C_2、C_3……在棱錐的棱上，而由这折綫的各边和棱錐的棱所

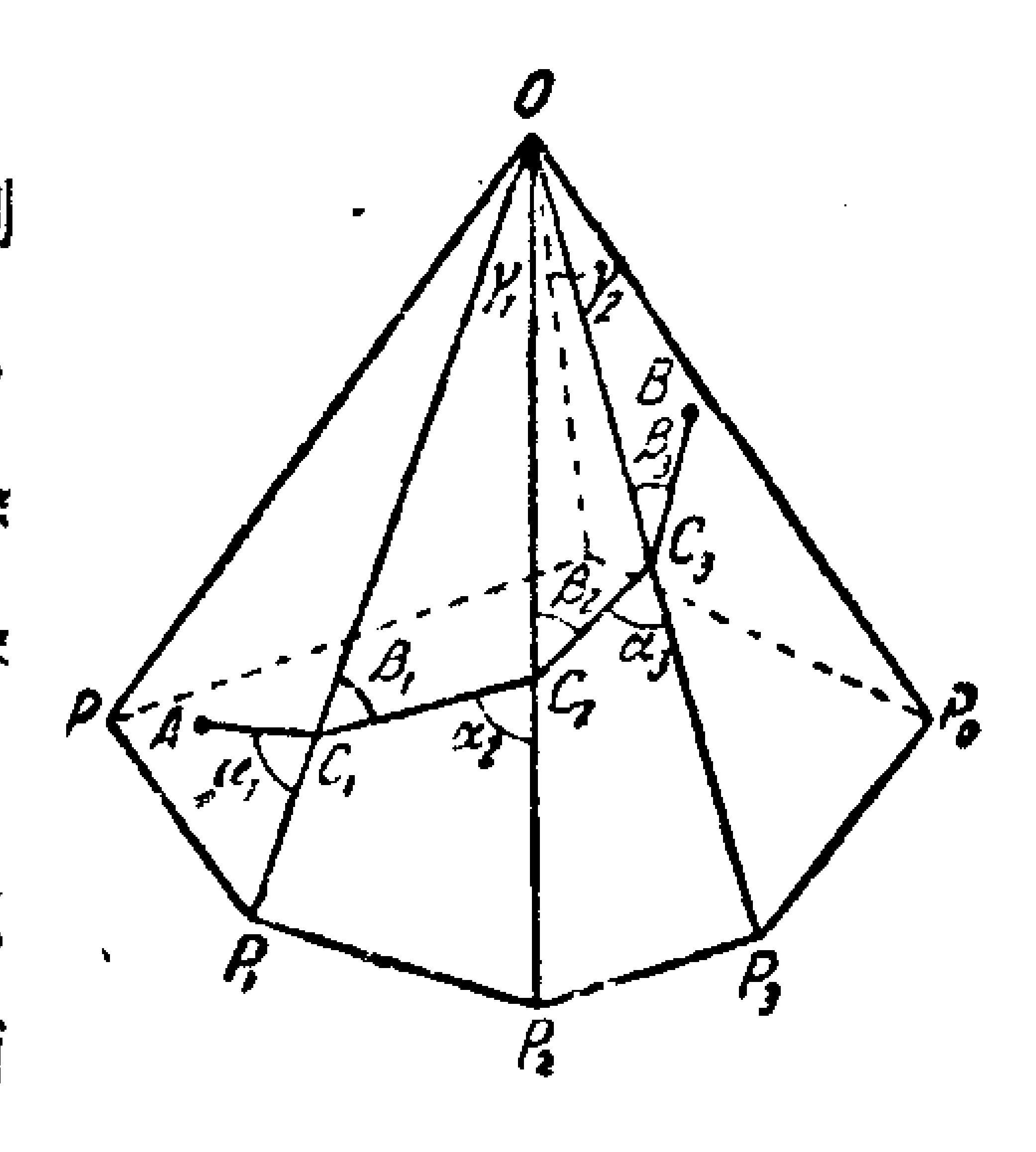


图 6.

① 棱柱的側面应当想象成是无限伸延的。

② 棱錐的側面应当想象成是无限伸延的。

作成的角α_1和β_1、α_2和β_2、α_3和β_3……一定兩兩相等：

$$\alpha_1=\beta_1,\quad \alpha_2=\beta_2,\quad \alpha_3=\beta_3,\cdots\cdots$$

我們現在来研究边C_1C_2所在的面P_1OP_2；若γ_1表示角P_1OP_2，那末在三角形C_1OC_2里，角α_2是外角，而角β_1和γ_1是內角。三角形的外角等于兩內对角的和，所以

$$\alpha_2=\beta_1+\gamma_1,\text{或 }\alpha_2-\beta_1=\gamma_1.$$

但因$\beta_1=\alpha_1$，所以$\alpha_2-\alpha_1=\gamma_1$.

同理，$\alpha_3-\alpha_2=\gamma_2$，这里$\gamma_2$是相鄰的兩个側棱$OP_2$和$OP_3$之間的交角，等等。

因此，最短綫和棱錐的任意兩个棱相交的角的差等于在頂端的相应几个平面角的和。

二 圓柱面上的最短綫

1. 圓柱面上的最短綫 我們現在来求某些最簡單的曲面上的最短綫。先从圓柱面开始①。

我們先要注意，圓柱面可以用一組和圓柱面的軸平行、因而自身也就互相平行的直綫全部蓋滿。这些直綫叫作圓柱面的母綫。

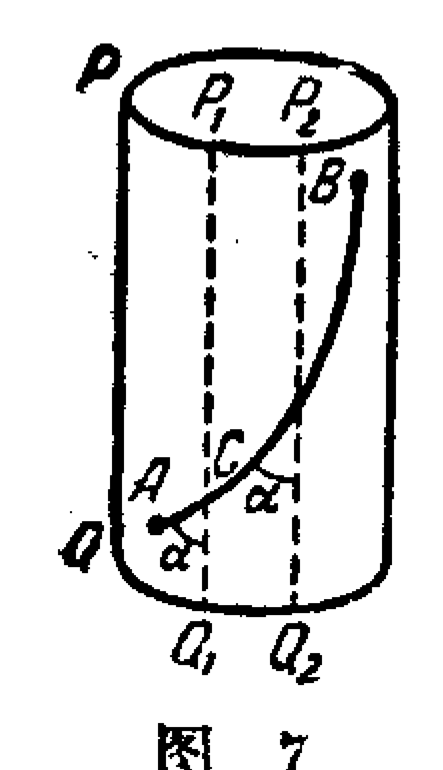


图 7.

在圓柱面上給定兩点A和B（图7）。我們要从那些在圓柱面上連接A、B兩点的曲綫当中找出最短的那一条。用$\overset{\frown}{AB}$来記这一条連接A、B兩点的最短綫。我們先討論A、B兩点不在同一

① 現在所討論的有限圓柱面（图7）是无限圓柱面的一部分。

条母綫上的情形。

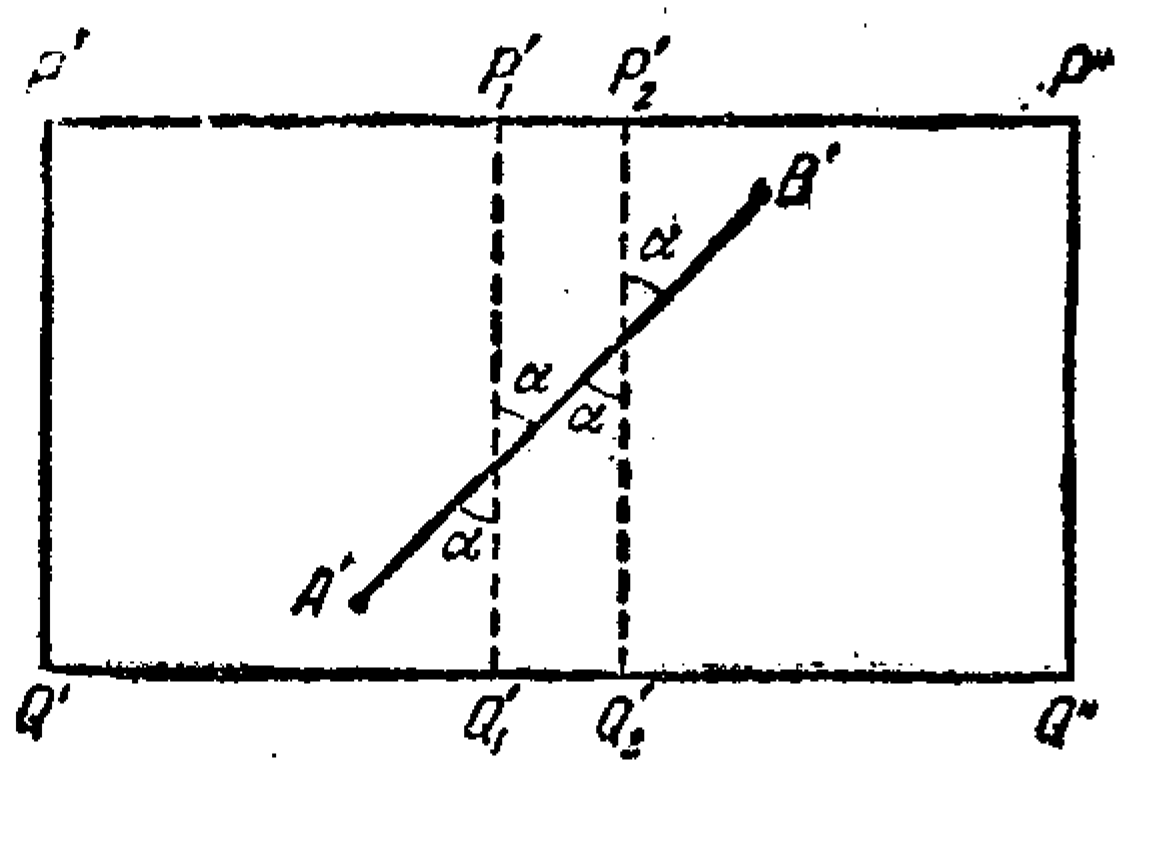


图 8.

我們把圓柱面沿着某一条母綫 PQ (和 $\overset{\frown}{AB}$ 不相交的)剪开，并且把它展开在一个平面上；于是就得到一个矩形(图8)(它的一对边，$P'P''$ 和 $Q'Q''$，是由展开圓柱面兩端的圓周而得到的；另一对边，$P'Q'$ 和 $P''Q''$，是由切口 PQ 的兩边所作成)。圓柱的母綫变成和矩形的边 $P'Q'$ 相平行的直綫。A、B 兩点变成在矩形里面的 A'、B' 兩点。在圓柱面上連接 A、B 兩点的綫变成連接矩形里面 A'、B' 兩点的平面上的綫。圓柱面上連接 A、B 兩点的最短弧 $\overset{\frown}{AB}$ 变成連接 A'、B' 兩点的最短的平面上的綫，就是直綫段 $A'B'$。因此，在把圓柱的側面展开成平面上的矩形之后，**圓柱面上的最短弧 $\overset{\frown}{AB}$ 变成直綫段 $A'B'$**。圓柱的母綫 P_1Q_1、P_2Q_2……变成和矩形 $P'Q'Q''P''$ 的边 $P'Q'$、$P''Q''$ 相平行的直綫 $P_1'Q_1'$、$P_2'Q_2'$……綫段 $A'B'$ 和这些直綫所作成的角，作为平行綫的同位角，是互等的。用 α 来記这些角的大小。

我們現在把矩形 $P'Q'Q''P''$ 卷起来(把它的对边 $P'Q'$ 和 $P''Q''$ 粘在一起)，使得它又重新回到本来圓柱的形式。点 A' 和 B' 又再变成圓柱面的点 A 和 B，而 A'、B' 的連綫 $A'B'$ 又再变成圓柱面上的最短弧 $\overset{\frown}{AB}$；直綫 $A'B'$ 和直綫 $P_1'Q_1'$、$P_2'Q_2'$……的交角变成和它相等的、弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和圓柱母綫 P_1Q_1、P_2Q_2……的交角。因为直綫 $A'B'$ 截所有和 $P'Q'$ 平行的直綫

成等角 α，所以 $A'B'$ 所变成的最短弧 $\overset{\frown}{AB}$ 截圓柱所有的母綫成等角 α（图 7）.

我們再来討論 A、B 兩点在同一条母綫上这一种特别情形（图 9）. 显然，在这种情形，母綫上的这一段綫 AB 就是圓柱面上 A、B 兩点之間的最短距离.

我們还要把 A、B 兩点在圓柱的同一圓截綫上这一种特别情形挑出来談一談（图 10）. 这截綫的弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和所有的母綫垂直. 它就是連接 A、B 兩点的最短弧.

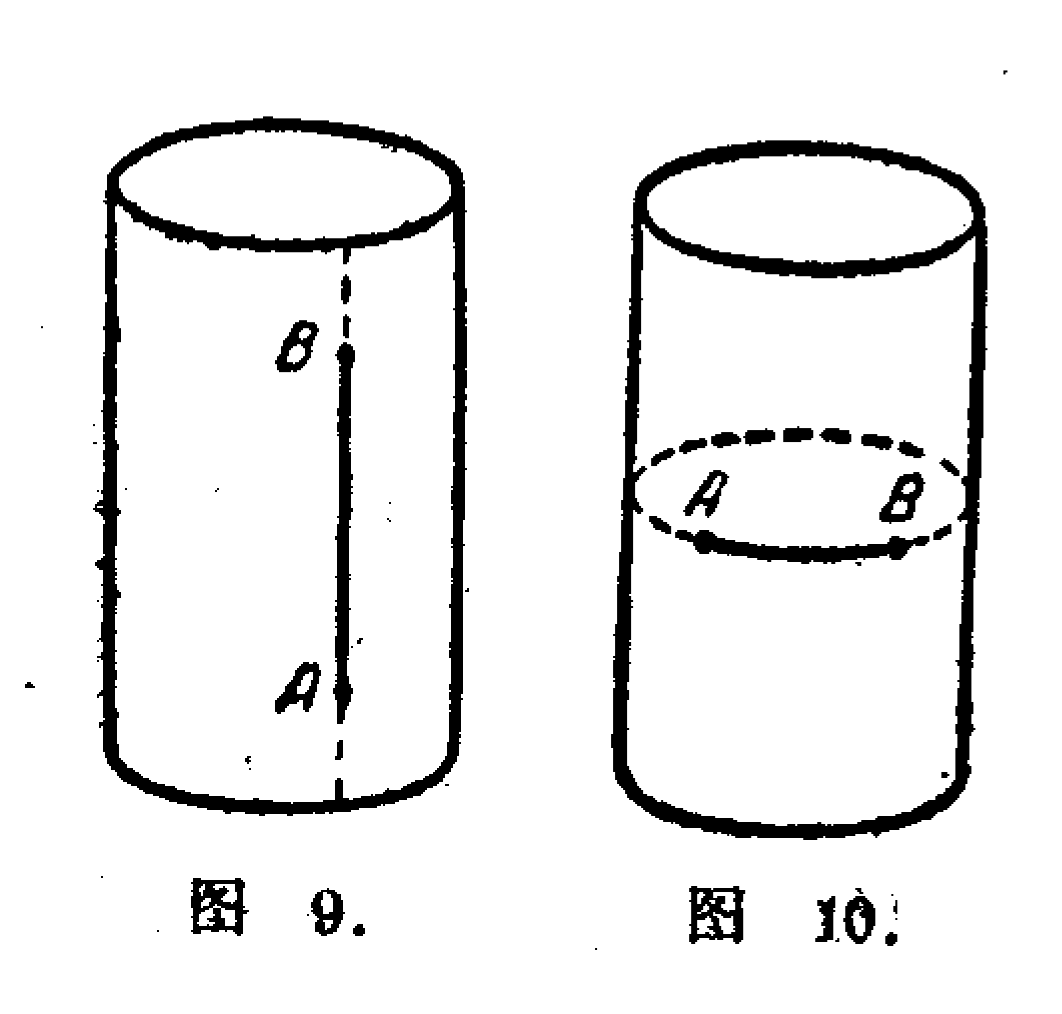


图 9.　　图 10.

若把圓柱面沿着和弧 $\overset{\frown}{AB}$ 不相交的母綫剪开，并把它展成平面上的矩形，那在剛才所討論的兩种特别情形里，最短弧变成和矩形的边平行的綫段. 在所有的其他情形，最短綫都和母綫相交成一个不等于直角的角（同时也不等于 0）①.

2. **螺旋綫** 圓柱面上截所有母綫成等角（不等于直角）的曲綫叫作螺旋綫.

我們用 α 記螺旋綫和圓柱母綫的交角. 和圓柱母綫相交成直角的綫是圓截綫. 我們可以把圓截綫看成是螺旋綫的一个极限情形，这时候 α 变成直角. 同理，圓柱的母綫也可以看成是另一个极限情形，这时候 α 变成 0.

① 讀者如能把尋求圓柱面上的最短綫这一問題和第 11 頁上尋求棱柱上的最短折綫問題比較一下，倒很有意思（前一問題是后一問題的极限情形）.

我們現在来研究圓柱面上的兩个运动：和軸平行（沿母綫）的运动和用一定速度繞着軸轉（沿圓截綫）的运动。

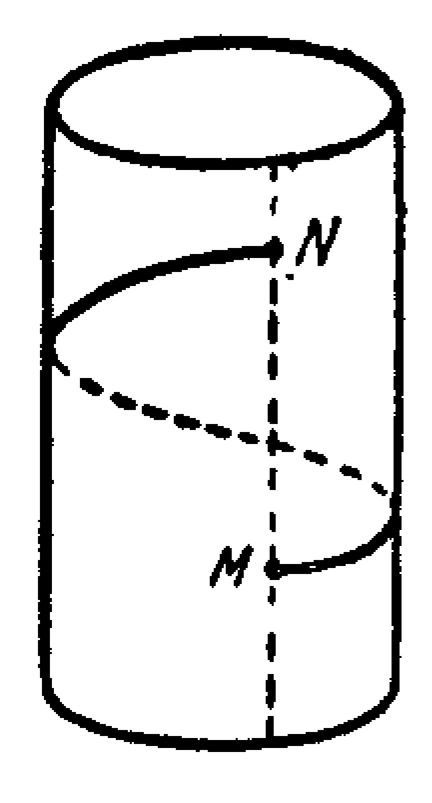


图 11.

这兩个运动任何一个都可以朝着兩个相反的方向进行。我們把在直立圓柱上的向上的运动作为正，向下的运动作为負。又把在直立圓柱上从右到左的轉动（对于头上脚下沿着圓柱的軸站着的人来說）或反时針轉作为**正轉动**。从左到右的轉动或順时針轉作为**負轉动**。

沿螺旋綫的运动可以从兩个运动相加得到：这兩个运动就是和圓柱的軸平行的运动和繞軸的轉动。假若沿着一条螺旋綫向上运动同时作着正轉动——从右到左（图 11），这螺旋綫就叫作**右螺旋綫**，若是向上运动同时作着負轉动——从左到右，这螺旋綫就叫作**左螺旋綫**。

許許多多繞着直立的支杆爬的蔓生植物（牽牛花、菜豆）都取右螺旋綫的形式（图12）。另一方面，例如蛇麻草，却取左螺旋綫的形式（图 13）。

假設一点在沿螺旋綫运动的时候，交某一母綫于点M，而在繼續沿这螺旋綫运动的时候，它又再交这条母綫于点N；当这点走完螺旋綫的弧$\overset{\frown}{MN}$的时候，它就繞着圓柱的軸轉了一个全周；同时它还向上走了一段距离，等于直綫段MN的長（图 11）。假若轉动的速度是 0，因而点只是沿着母綫平行圓柱的軸移动，这时候就出現了第一种极限情形；假若平行圓柱的軸的移动速度是 0，因而点只是繞軸沿圓周轉动，这时候就

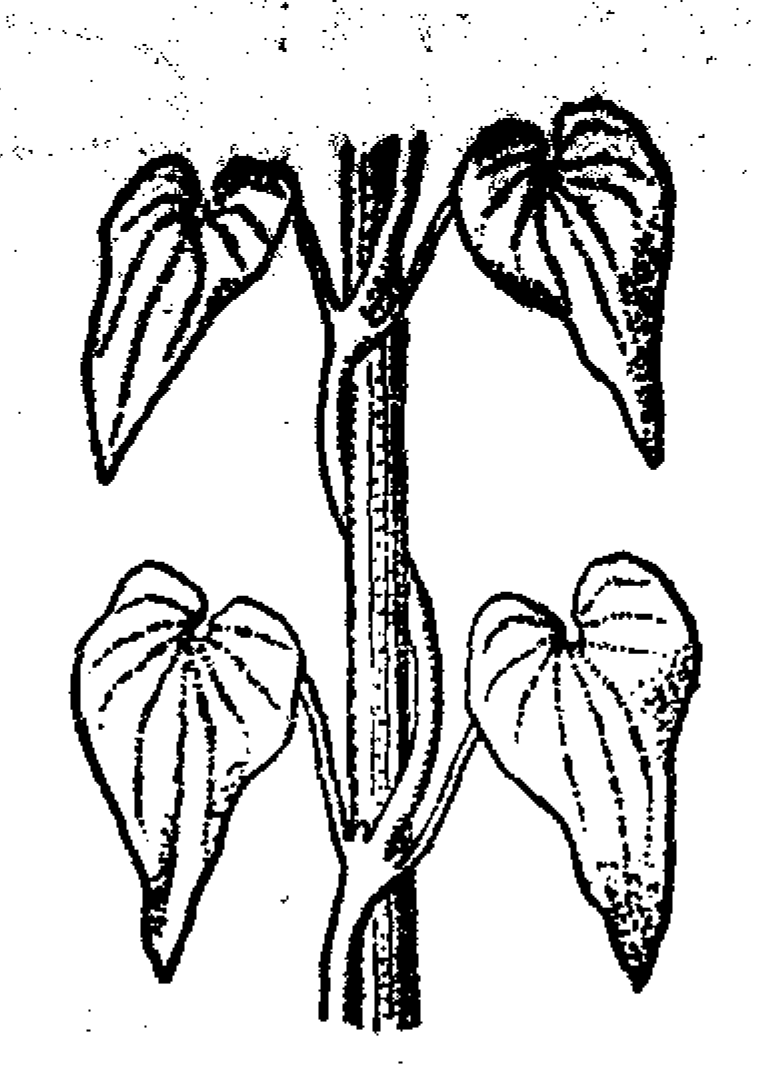


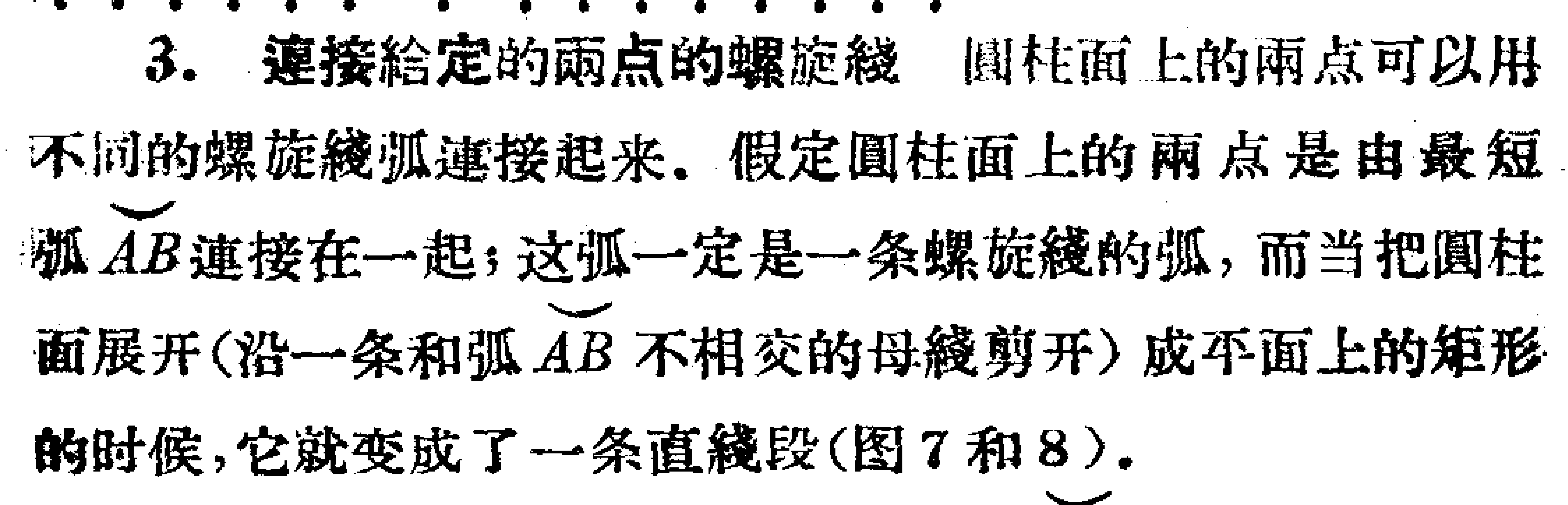
图 12.

出現了另外一种极限情形。

根据以上所說，我們就得出

定理 圓柱面上連接給定的A、B兩点的最短弧$\overset{\frown}{AB}$是一条螺旋綫的弧。

图 13.



3. 連接給定的兩点的螺旋綫 圓柱面上的兩点可以用不同的螺旋綫弧連接起来。假定圓柱面上的兩点是由最短弧$\overset{\frown}{AB}$連接在一起；这弧一定是一条螺旋綫的弧，而当把圓柱面展开（沿一条和弧$\overset{\frown}{AB}$不相交的母綫剪开）成平面上的矩形的时候，它就变成了一条直綫段（图 7 和 8）。

我們現在把圓柱面沿一条和最短弧$\overset{\frown}{AB}$相交于点C的母綫P_1Q_1剪开（图 7）。綫$\overset{\frown}{AB}$就被切成$\overset{\frown}{AC}$和$\overset{\frown}{CB}$兩段，假若把圓柱面展开成平面上的矩形，A、B兩点就分别变成矩形里面的A''和B''兩点（图 14），而弧$\overset{\frown}{AB}$的兩个部分$\overset{\frown}{AC}$和$\overset{\frown}{CB}$分别变成直綫段$A''C''$和$B''C'$。但点A''和B''可以用矩形$P_1'Q_1'Q_1''P_1''$里面的直綫段$A''B''$連接在一起。显然，$A''B''$

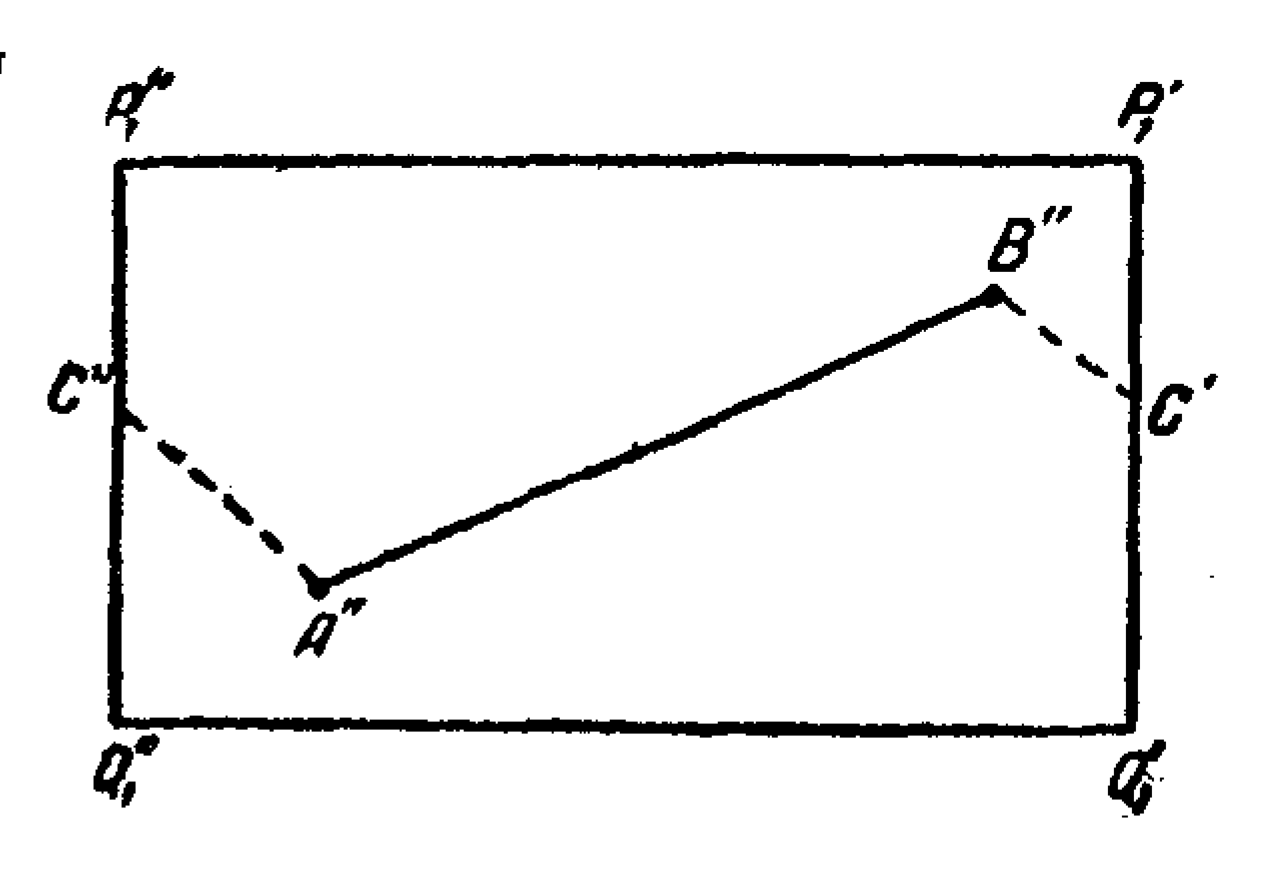


图 14.

是在这矩形里面連接 A'' 和 B'' 两点的任何連綫当中最短的一条.

現在把我們矩形的側边 $P_1'Q_1'$ 和 $P_1''Q_1''$ 粘在一起，使得 C' 和 C'' 合在一起占据了位置 C，这样重新把这矩形卷成圓柱；这时候 A'' 和 B'' 两点重新变成圓柱面上的 A、B 两点，直綫段 $A''C''$ 和 $B''C'$ 变成圓柱面上連接 A、B 两点的最短弧 $\overset{\smile}{AB}$. 而直綫段 $A''B''$ 也变成一条螺旋綫弧 $\underset{\frown}{AB}$，它也連接 A、B 两点. 在图 15 里，$\overset{\smile}{AB}$ 是过 A、B 的右螺旋綫弧，$\underset{\frown}{AB}$ 是左螺旋綫弧.

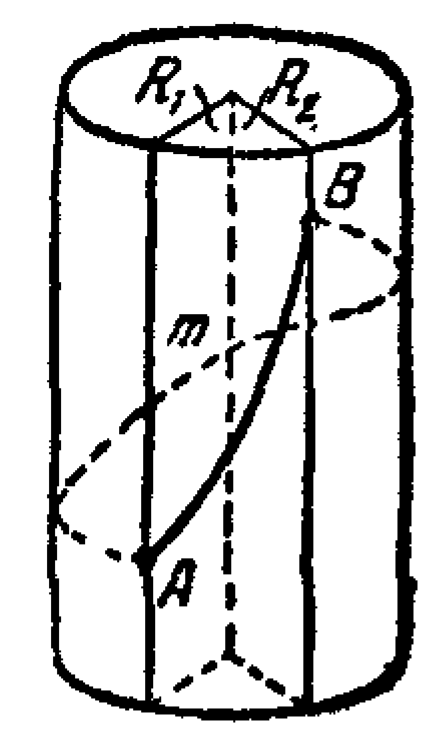


图 15.

和矩形的边 $P_1'Q_1'$ 或 $P_1''Q_1''$ 不相交的綫，在矩形卷成圓柱之后，变成了和母綫 P_1Q_1 也不相交的綫（因为我們矩形的边 $P_1'Q_1'$ 和 $P_1''Q_1''$ 是沿这条直綫粘起来的）. 在这些綫当中最短的是弧 $\underset{\frown}{AB}=\underset{\frown}{AmB}$（图 15）. 但它可能不是圓柱面上連接 A、B 两点的所有綫当中最短的一条，因为假若 $\overset{\smile}{AB}$ 比 $\underset{\frown}{AB}$ 短，那 $\underset{\frown}{AB}$ 就不是圓柱面上連接 A、B 两点的最短綫.

現在过点 A 和圓柱的軸引半平面 R_1，又过点 B 和圓柱的軸引半平面 R_2（图 15）.

这两个半平面作成两个二面角. 这两角当中的一角包含弧 $\overset{\smile}{AB}$，另一角包含弧 $\underset{\frown}{AB}$. 这两条弧当中比較短的是在比較

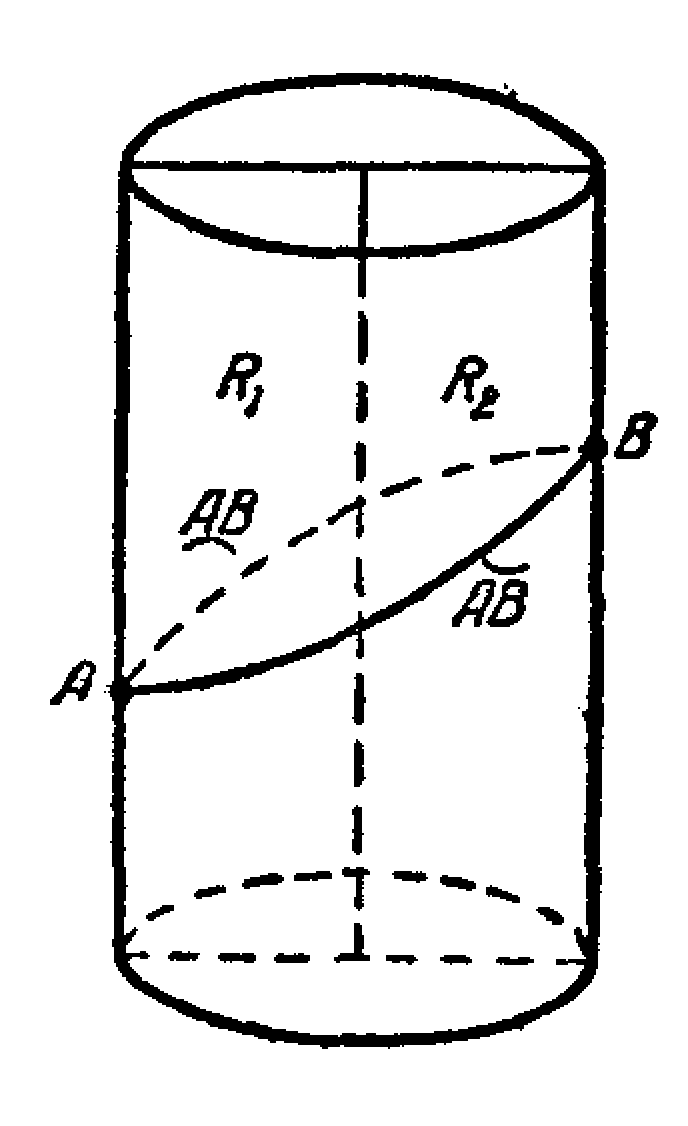


图 16.

小的二面角里面的一条。

但若半平面 R_1 和 R_2 一个是另一个的延續(也就是它們的夾角等于一个平角),那弧 $\overset{\smile}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{AB}$ 在長度上相等。在这种情形,圓柱面上連接 A、B 兩点的最短弧就有兩条(長度一样)(图 16)。

我們所討論的連接 A、B 兩点的螺旋綫弧 $\overset{\smile}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{AB}$ 有一个共通的性質:沿这兩条弧的任何一条从点 A 到点 B,我們总沒有繞圓柱的軸轉完一个全周。

图 17.

現在把一張狹長的矩形紙条(假定它的寬等于圓柱的高(图 17))繞圓柱裹纏許多层。在这紙上用針在 A、B 兩点各穿一孔,然后把它展开成平面上的矩形。紙条上的某些地方会有点 A 的穿孔痕迹;在图 18 里,这些痕迹用字母 A_1'、A_2'、A_3'…… 来記。这些痕迹在一条和矩形横边平行的水平直綫上。若过点 A_1'、A_2'、A_3'…… 引直綫 $P_1'Q_1'$、$P_2'Q_2'$、$P_3'Q_3'$……和矩形的另一双边平行,我們就

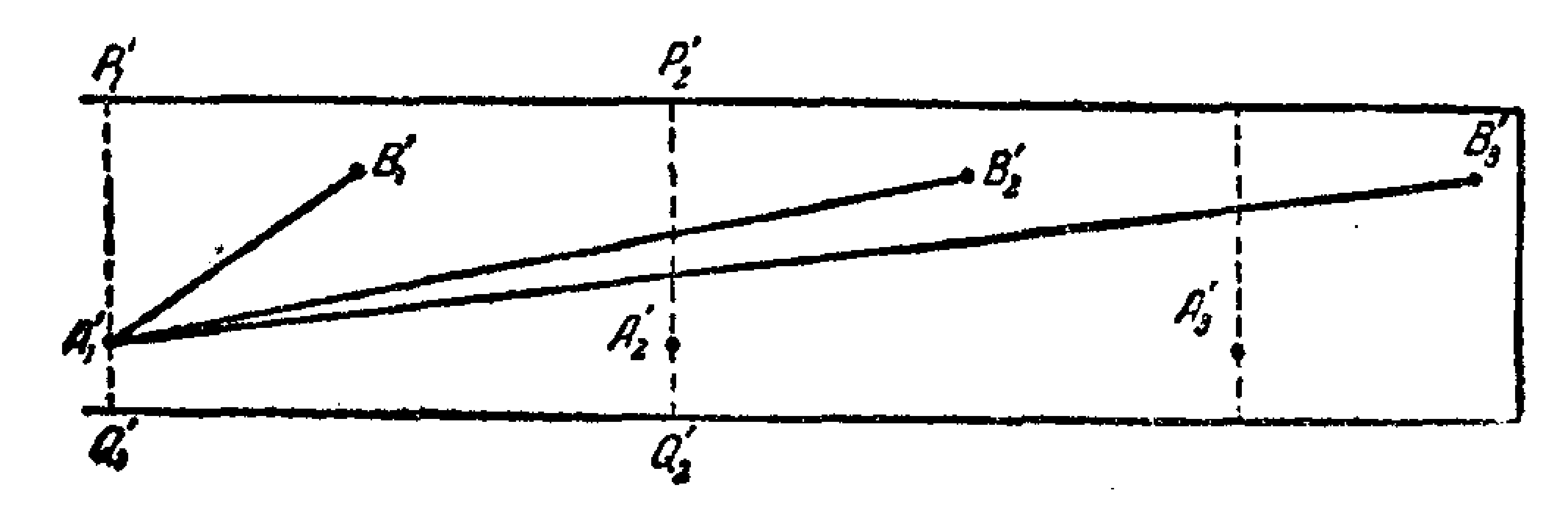


图 18

分出了一个矩形 $P_1'Q_1'Q_2'P_2'$，它是紙条恰好繞圓柱一个全周的那一部分；当把紙条卷在圓柱上的时候，切口 $P_1'Q_1'$ 和 $P_2'Q_2'$ 就落在圓柱上面过点 A 的母綫 PQ 上；同时，重合在一起的点 A_1'、A_2' 就落在圓柱的点 A 上。

我們紙条上的点 B_1'、B_2'、B_3'……是圓柱上点 B 的穿孔痕迹。它們的分布完全和点 A_1'、A_2'、A_3'……的分布相似。

用直綫把点 A_1' 和点 B_1'、B_2'、B_3'……連接起来。然后重新把我們的紙条卷在圓柱上，使得点 A_1'、A_2'、A_3'……仍旧落在圓柱的点 A，点 B_1'、B_2'、B_3'……仍旧落在圓柱的点 B。直綫段 $A_1'B_1'$ 变成了螺旋綫弧 $\overset{\frown}{AB}$（图 17），关于这条螺旋綫弧，我們前面已經談到过。

假若沿着圓柱面上的曲綫 $\overset{\frown}{AB}$ 从点 A 到点 B，我們繞圓柱的軸完成了多于 n 个而少于 $(n+1)$ 个正（負）的全周，或恰好 n 个全周，为簡單起見，我們就說："这条曲綫 $\overset{\frown}{AB}$ 繞圓柱的軸轉了 n 个正（負）整周。"

当把平面裹纒在圓柱上的时候，直綫段 $A_1'B_2'$ 也变成連接 A、B 兩点的一条螺旋綫弧 $(\overset{\frown}{AB})_1$（图 19）；同样，直綫段 $A_1'B_3'$、$A_1'B_4'$……也变成連接这兩点的螺旋綫弧 $(\overset{\frown}{AB})_2$（图20）、$(\overset{\frown}{AB})_3$……弧 $(\overset{\frown}{AB})_1$ 繞圓柱軸轉了一个正整周，弧 $(\overset{\frown}{AB})_2$、$(\overset{\frown}{AB})_3$……分别轉了兩个、三个……这样的整周。

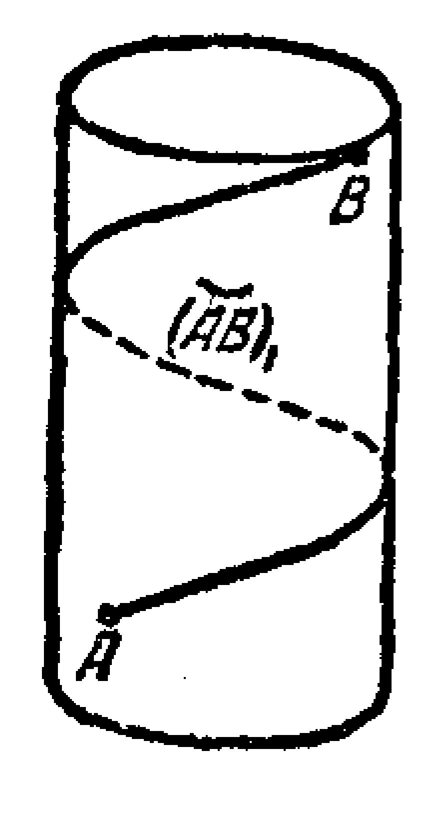


图 19.

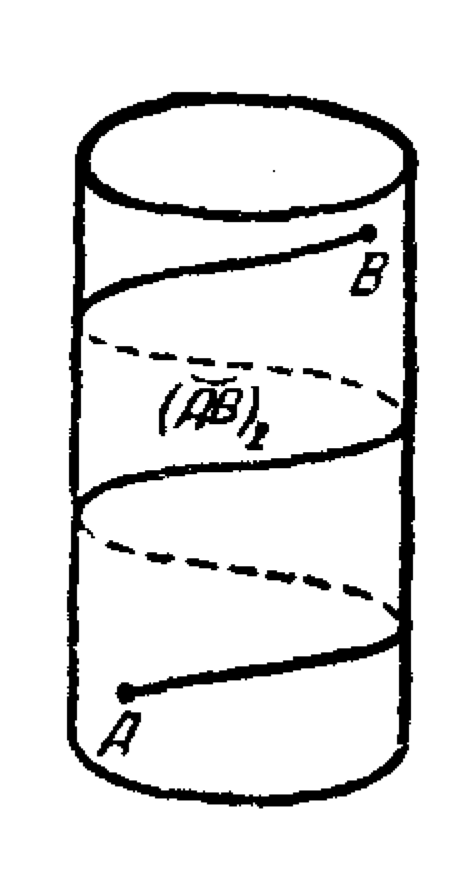


图 20.

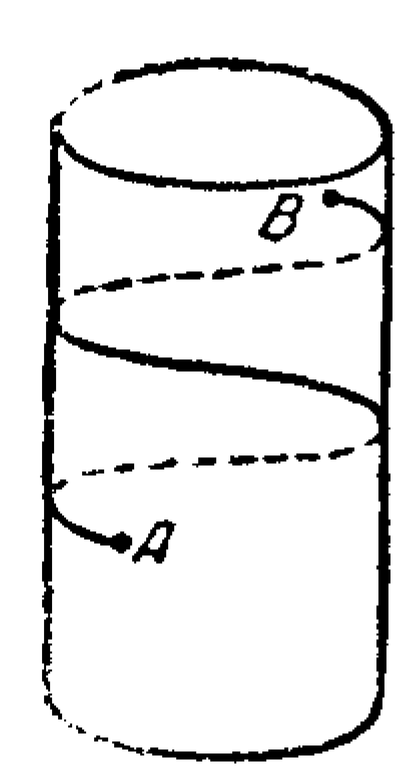


图 21.

弧$(\overset{\frown}{AB})_1$是連接A、B兩点并繞圓柱軸轉一个正整周的弧当中最短的一条。同样，$(\overset{\frown}{AB})_2$、$(\overset{\frown}{AB})_3$等等分別是轉兩个、三个等等这样的整周的弧当中最短的。

上面所討論的弧都是右螺旋綫弧。同样也可以得到連接A、B兩点繞圓柱軸轉一个、兩个、三个……負整周的左螺旋綫弧(图21)。这些弧每一条都是連接A、B兩点并繞圓柱的軸轉相应数目的負整周的最短綫。

我們現在来說明，一根在点A和点B固定并且綳得紧紧的彈性細綫比方一根橡皮筋在圓柱面上是落在什么样的位置的。綳紧的时候，这根細綫落在一条最短綫上，就是說，落在一条連接A、B兩点的螺旋綫上。比如說，假若我們把細綫纒在圓柱上，使得沿着这根細綫移动的时候，必須繞軸作正轉(从右到左)，那末这根細綫就落在螺旋綫$\overset{\frown}{AB}$、$(\overset{\frown}{AB})_1$、$(\overset{\frown}{AB})_2$……当中的一条上。假若这根細綫繞圓柱的軸轉不到一全周，它就落在$\overset{\frown}{AB}$的位置；假若轉过了一全周，就落在$(\overset{\frown}{AB})_1$的位置；假若轉过了兩全周，就落在$(\overset{\frown}{AB})_2$的位置，等等。

事实上，在平面上的矩形上，紧綳在点A_1'和点B_1'、B_2'、B_3'……当中某一点的細綫必落在直綫段$A_1'B_1'$、$A_1'B_2'$、$A_1'B_3'$……当中的一条上。假若把这張紙裹纒在圓柱面上，使得点A_1'落在点A上，点B_1'、B_2'、B_3'……落在点B上，那末这根綳得很紧的細綫必分別合在螺旋綫弧$\overset{\frown}{AB}$、$(\overset{\frown}{AB})_1$、$(\overset{\frown}{AB})_2$……上。

三 錐式曲面上的最短綫

1. 錐式曲面上的最短綫 設从点 O 引兩条射綫 OA 和 ON。使射綫 OA 繞射綫 ON 轉。这时候射綫 OA 所描出的面叫作錐式曲面(圓錐曲面)(图 22)，ON 叫作圓錐的軸。过点 O 引出的在錐式曲面上的射綫叫作圓錐的母綫①。

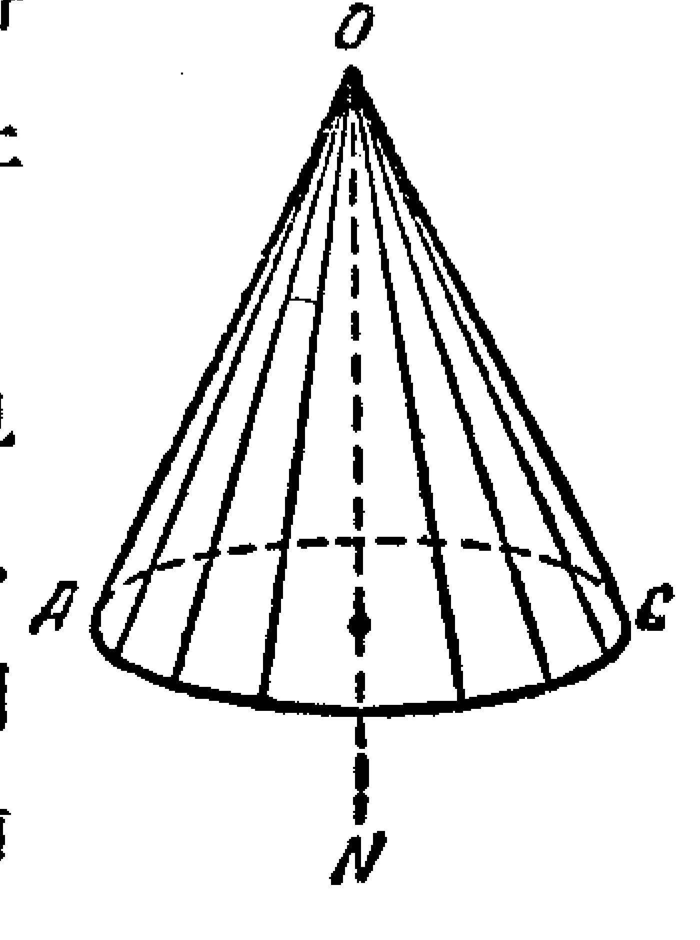


图 22.

假若过母綫 OA 和 OC 所引的平面也过圓錐的軸，这兩条母綫就叫作对母綫。兩条对母綫把圓錐分成兩个相等的(全同的)部分。我們把錐式曲面沿母綫 OA 剪开；剪开以后，錐式曲面就可以展开在平面上。圓錐的頂点 O 变成平面上的点 O'；圓錐的母綫变成平面上过点 O' 的射綫。整个錐式曲面就变成平面上的某一个角 $A_1'O'A_2'$ (图 23)。这个角叫作圓錐的展开角。它总小于 360°。角的边 $O'A_1'$ 和 $O'A_2'$ 是由錐式曲面上的母綫 OA 作成的，我們就是沿着这条母綫把錐式曲面剪开的。和母綫 OA 相对的母綫 OC 变成了角 $A_1'O'A_2'$ 的平分綫 $O'C'$。事实上，OA 和 OC 兩条母綫把沿 OA 剪开的錐式曲面分成兩个相等的部分 S 和 T。当把这

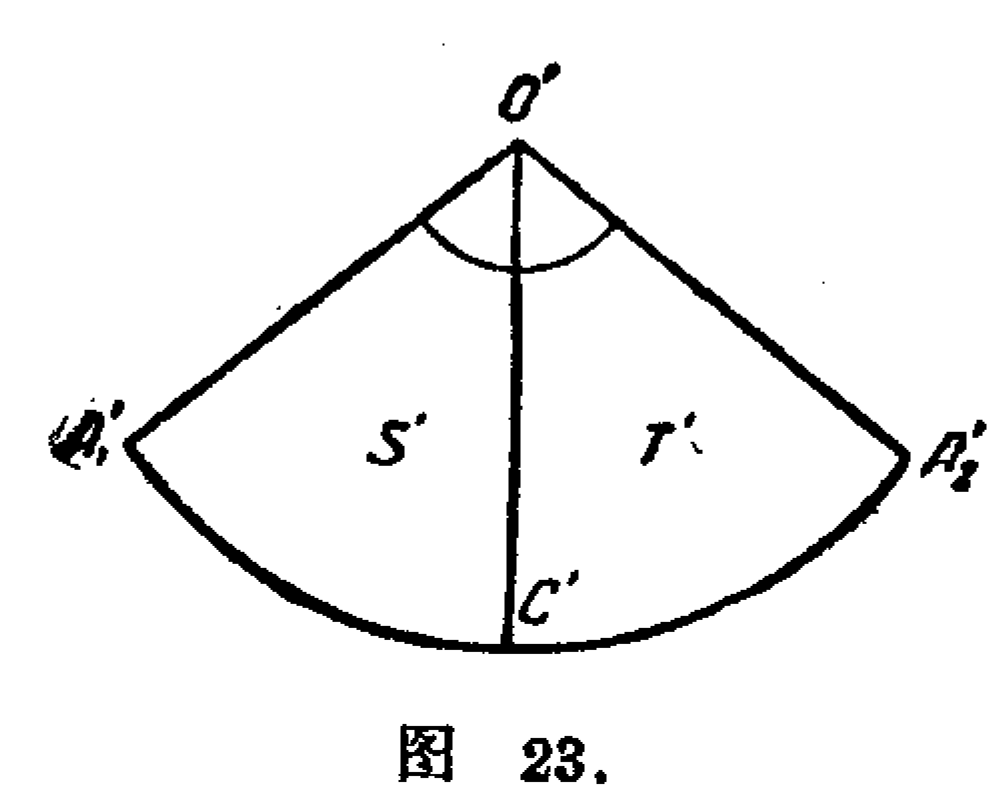


图 23.

① 图 22 里所画的只是无限圓錐的一部分。

曲面展成平面上的角 $A_1'O'A_2'$ 的时候，圓錐的这兩个部分各变成了这角的一半 S' 和 T'，而母綫 OC 变成了这角的平分綫 $O'C'$。

我們已經把剪开了的錐式曲面展开在平面上。現在我們作一个相反的动作——把角 $A_1'O'A_2'$ 卷成圓錐。这时候点 O' 变成了圓錐的頂点 O，角的边 $O'A_1'$ 和 $O'A_2'$ 变成了同一条母綫。

我們把平面沿角的边 $O'A_1'$ 剪开。再把剪开了的平面裹在圓錐上。一般說来，这时候平面要把圓錐面裹上几层。比如說，假若圓錐的展开角等于 90°，那平面就要把圓錐面裹上四层；这就是說，假若过点 O' 引射綫 $O'A_2'$、$O'A_3'$、$O'A_4'$ 分别和 $O'A_1'$ 成 90°、180°、270° 的角，那在把剪开了的平面裹在圓錐上的时候，角 $A_1'O'A_2'$、$A_2'O'A_3'$、$A_3'O'A_4'$、$A_4'O'A_1'$ 当中的任何一角都完全盖滿了圓錐的面。全部在一起，我們就用剪开了的平面把圓錐裹了四层。平面上的射綫 $O'A_1'$、$O'A_2'$、$O'A_3'$、$O'A_4'$ 都变成圓錐上的同一条母綫。

但若展开角等于，比方說 100°，那剪开了的平面就会有三层完全盖滿圓錐面，此外，圓錐有一部分还裹上了第四层（平面是由三个用 O' 做頂点的互相鄰接的 100° 的角和一个 60° 的角所組成，100° 的角每一个把整个圓錐面裹上一层，60° 的角又裹上了这面的一部分）。

2. 錐式曲面上的短程綫 我們現在来討論平面上一条任意直綫 l'。假設直綫 l' 經过点 O'。因而它就是由兩条射綫 $O'D'$ 和 $O'E'$ 所組成（图 24）。把平面裹在圓錐上的时候（这

时候点 O' 落在圓錐的頂点 O 上)，射綫 $O'D'$ 和 $O'E'$ 的每一条都变成了圓錐上的一条母綫。我們的直綫变成了兩条母綫①.

現設直綫 l' 不过点 O'(图 25)。我們沿一条和直綫 l' 平行的射綫 $O'A'$ 把平面剪开，并把剪开了的平面裹在錐式曲面上.这时候直綫 l' 变成了錐式曲面上的某一条曲綫 l (图 26).这条曲綫 l 叫作圓錐面上的**短程綫**(也叫**測地綫**)。直綫 l' 上的每一段都变成曲綫 l 上的一段弧. 反过来，曲綫 l 的每一段

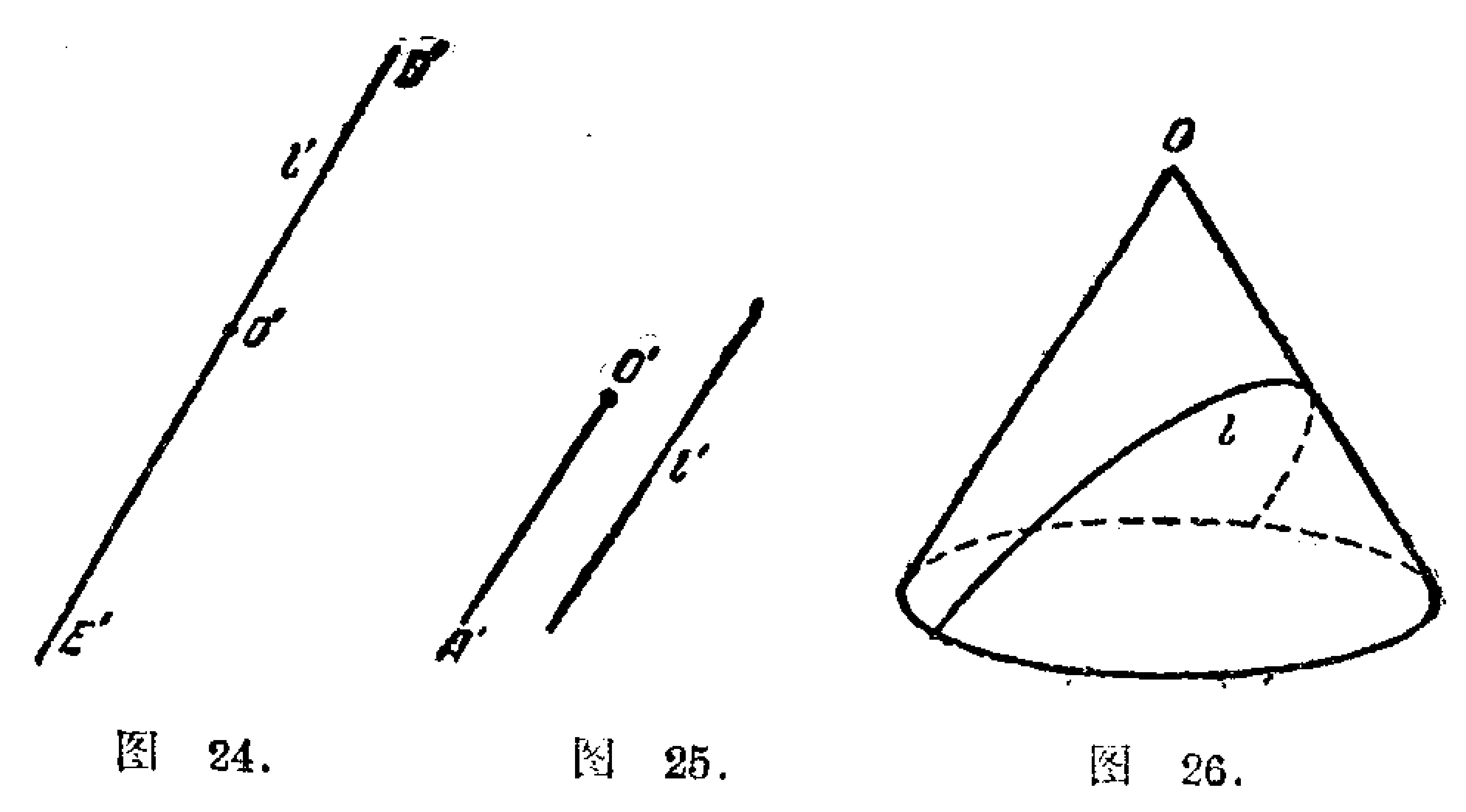


图 24.　　图 25.　　图 26.

弧，在把錐式曲面展开在平面上的时候，又变成了直綫 l 上的一段。

这样得到的曲綫在圓錐面上所起的作用和螺旋綫在圓柱面上所起的作用相似。

我們現在把錐式曲面上的 A、B 兩点用这曲面上的一切可能的綫連接起来，并設它們当中的一条，弧 $\overset{\frown}{AB}$，長度最短.

① 这兩条母綫可能合并成一条. 假若圓錐展开角的度数是 180 的一个因数，就是說，假若这角等于 180°、90°、60°…… 一般說等于 $\frac{180°}{k}$，k 是整数，那末这种情形就会发生。

当把錐式曲面展开在平面上的时候，弧 $\overset{\frown}{AB}$ 就变成平面上的弧 $A'B'$；由于弧 $\overset{\frown}{AB}$ 是錐式曲面上連接 A、B 兩点的綫当中最短的一条，所以 $A'B'$ 是平面上連接 A'、B' 的綫当中最短的一条。可知 $A'B'$ 是一直綫段。当把錐式曲面展开在平面上的时候变成了一直綫段的弧 $\overset{\frown}{AB}$，是一条短程綫弧。

我們現在看得出来，短程綫的形狀实質上是看圓錐的展开角而不同的。

3. 短程綫上的二重点 我們先引进下面的定义。假設沿某一条綫 q 移动，我們兩次經过同一点 A。这点 A 就叫作綫 q 的二重点[1]。图 27 里的点 B 是綫 l 的一个二重点：沿綫 l 順着箭头的方向移动，我們就兩次經过点 B。

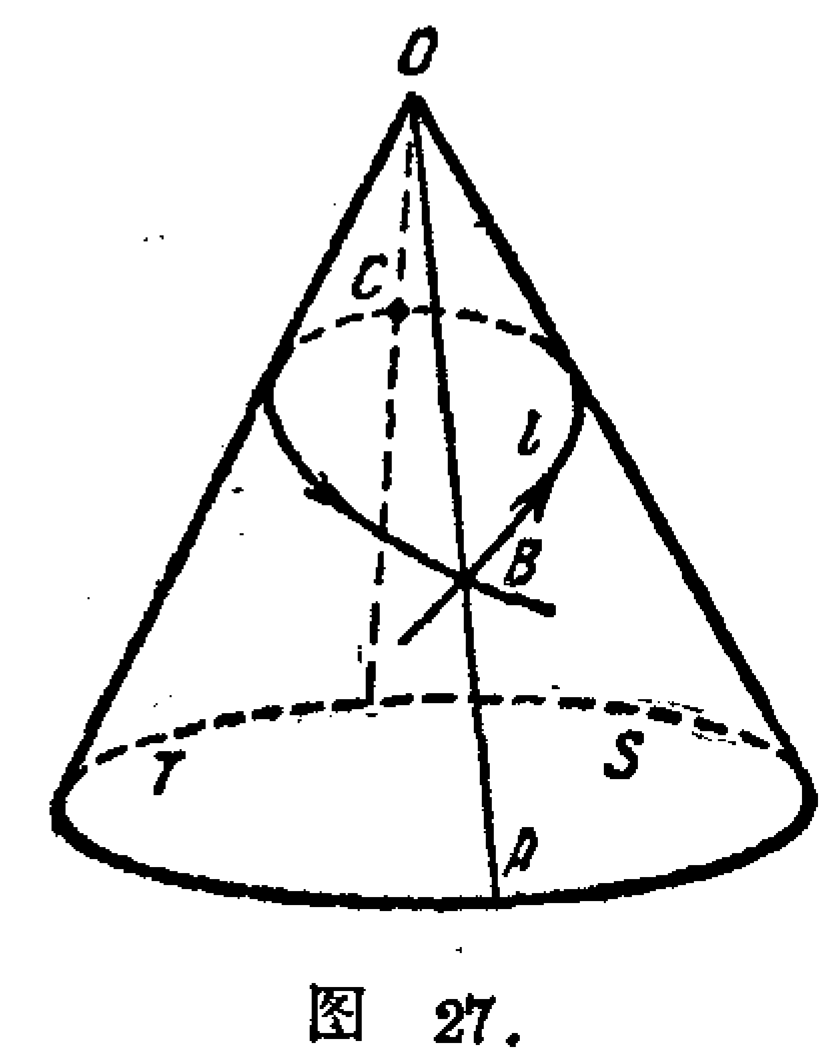


图 27.

定理 I 若圓錐的展开角大于或等于 180°，那末在它上面的短程綫就沒有二重点。但若圓錐的展开角小于 180°，那末所有的短程綫至少有一个二重点。

我們現在来看平面上的一点 O' 和不过 O' 的直綫 l'（图 28）。若把平面裹在圓錐上，使得 O' 落在圓錐的頂点 O 上，那末直綫 l' 就变成一条短程綫 l。

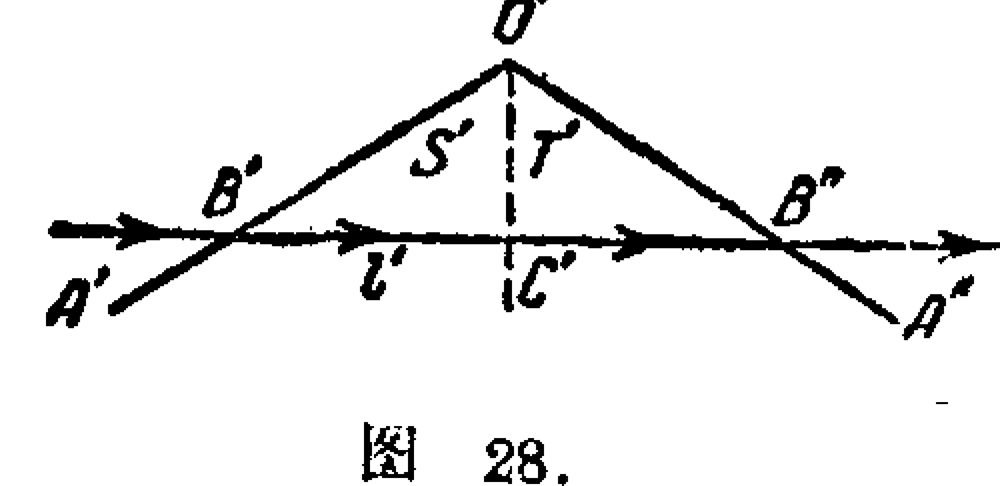


图 28.

設 C' 是从 O' 到 l' 上的垂綫

[1] 二重点有时又叫作結点。

的垂足。在把平面裹在圓錐上的时候，射綫 $O'C'$ 就变成圓錐的一条母綫 OC。C 点有时叫作錐式曲面上的短程綫的頂点。我們用 OA 来記圓錐的对母綫；OA 和 OC 把圓錐的面分成兩个相等的部分 S 和 T。把圓錐面沿母綫 OA 剪开，并且把它展开在平面上，使得圓錐的頂点 O 重新变成点 O'，母綫 OC 重新变成射綫 $O'C'$。这时候短程綫 l 重新变成直綫 l'。整个錐式曲面变成了角 $A'O'A''$。它的兩半部分 S 和 T 变成了这角的兩半S'和T'；直綫 $O'C'$ 是这角的平分綫。

我們現在分成兩种情况来討論。

1. 角 $A'O'A''$（圓錐的展开角）大于或等于 180°（图 29）。直綫 l' 完全在这个角的里面。假若重新把这个角裹在錐式曲面上使得角的兩边 $O'A'$ 和 $O'A''$ 和母綫 OA 重合，那末直綫 l' 重新变成了圓錐面上的短程綫 l；直綫 l' 上不同的点变成了圓錐上不同的点；因此，在这种情形，l 沒有二重点。

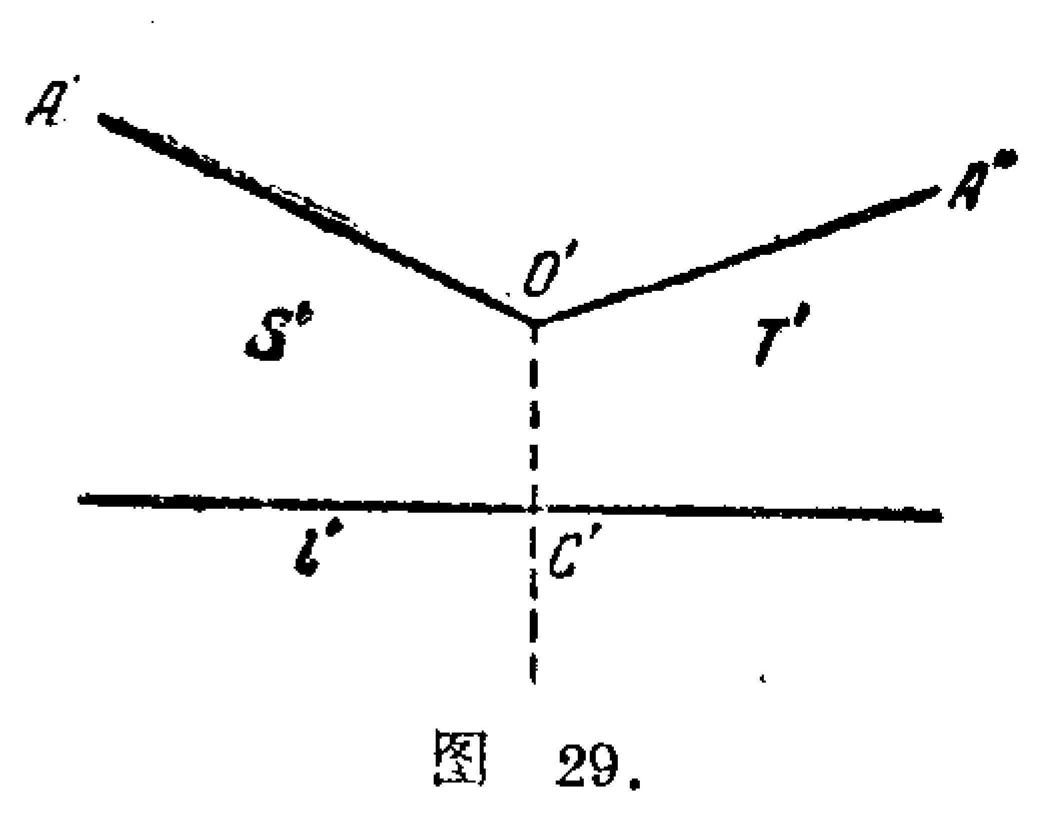


图 29.

2. 角 $A'O'A''$ 小于 180°。和角的平分綫 $O'C'$ 垂直的直綫 l' 交角的兩边于兩点，分别記作 B' 和 B''（图 28）。

三角形 $B'O'B''$是一个等腰三角形，因为它的高 $O'C'$ 就是它的角的平分綫。我們把角 $A'O'A''$ 重新裹在圓錐面上，使得 O' 变成圓錐的頂点，而角的兩边 $O'A'$ 和 $O'A''$ 变成母綫 OA。点 B' 和 B''，由于綫段 $O'B'$ 和 $O'B''$ 相等，所以落在这条母綫上的同一点 B（图 27）。直綫 l' 变成了短程綫 l，直綫 l' 包含

在角 $B'O'B''$ 里的 S' 这一半里面的一段 $B'C'$ 变成了綫 l 在錐式曲面上 S 这一半連接 B、C 兩点的一段弧 $\smile{BC}$；同理，包含在角 $B'O'B''$ 里的 T' 这一半里面的一段 $B''C'$ 变成了綫 l 在錐式曲面上 T 这一半連接 B、C 兩点的一段弧 $\frown{BC}$. B 点是曲綫 l 的一个二重点. 直綫 l' 的一段 $B'B''$ 变成了弧 BCB，形狀就象繩子結成的圈.

我們現在来說明：一条短程綫到底有多少个二重点？下面的定理回答了这个問題，这定理是上面一个定理的改进.

定理 2 假定圓錐的展开角等于 α（α 用度数表示），

1. 若 $180°$ 不能被 α 所整除，那末短程綫的二重点的数目等于分数 $\frac{180}{\alpha}$ 的整数部分.

2. 若 $180°$ 能被 α 所整除，那末二重点的数目等于 $\frac{180}{\alpha}-1$.

若 $\alpha>180$，那末分数 $\frac{180}{\alpha}$ 的整数部分等于 0；若 $\alpha=180$，那末 $\frac{180}{\alpha}-1=0$. 因此，根据我們的定理，在这兩种情形，二重点的数目应該是 0；这和上面一个定理前一部分的意思一样.

还需要討論的是 $\alpha<180$ 的情形. 我們仍旧用上面一个定理的記号. 角 $A'O'A''$（图 30）是圓錐的展开角. 过点 O' 引直綫 l' 的垂綫 $O'C'$ 和平行綫 KL. KL 分平面成兩个半平面. 我們只看直綫 l' 所在的这一半平面. 过点 O' 在这半平面上引一系列射綫，它們和射綫 $O'C'$ 的交角是 $\frac{\alpha}{2}$ 的倍数. 这就是射綫 $O'B'$、$O'B''$、$O'B_1'$、$O'B_1''$……它們和直綫 l' 分別交于点 B'、B''、B_1'、B_1''…… 注意 $O'B'=O'B''$，$O'B_1'=O'B_1''$……

現在把我們的半平面裹在圓錐上，使得点 O' 落在圓錐的頂点 O 上，射綫 $O'C'$ 落在母綫 OC 上(图 31)．我們的半平面上夾在相鄰的射綫 $O'B_1'$、

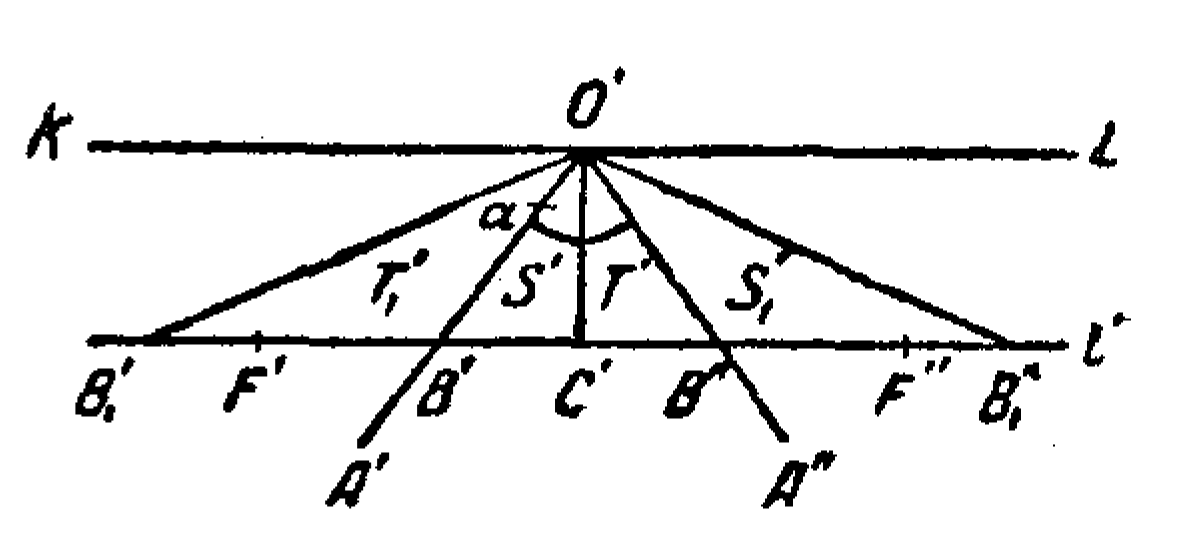


图 30.

$O'B'$、$O'C'$、$O'B''$、$O'B_1''$……之間的各个角(各等于$\frac{\alpha}{2}$)这时候把錐式曲面的兩半 S 和 T 裹上了几层．就是說，角 S' 落在圓錐上 S 这一半；和它相鄰的角 T_1' 和 T' 落在圓錐的另一半 T，等等．因为射綫 $O'C'$ 落在母綫 OC 上，所以射綫 $O'B'$、$O'B''$落在对母綫 OA 上，射綫 $O'B_1'$、$O'B_1''$重新落在 OC 上，等等．

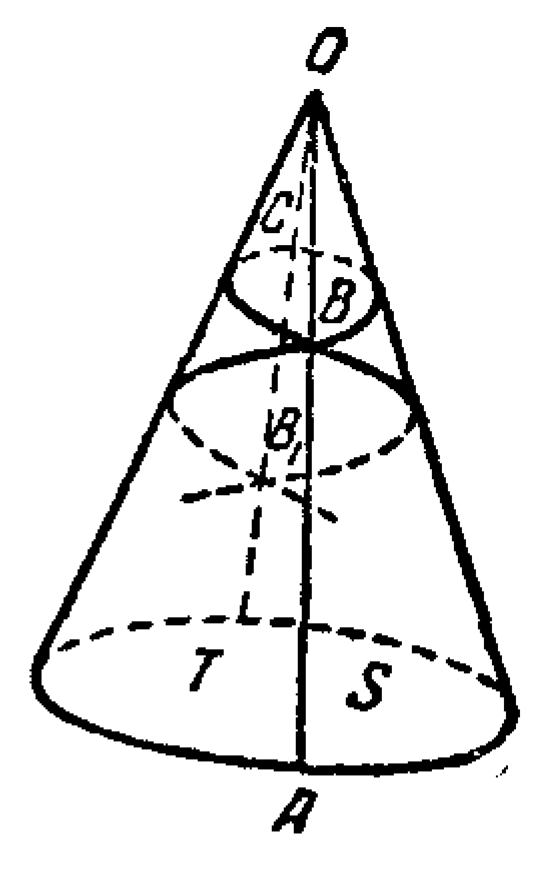


图 31.

因为直綫段 $O'B'=O'B''$，$O'B_1'=O'B_1''$，所以每一对点 B' 和 B''、B_1' 和 B_1''……同落在一条母綫上，而且兩兩重合：点 B' 和 B'' 重合而且都落在母綫 OA 的点 B 上；B_1' 和 B_1''，都落在母綫 OC 的点 B_1 上，等等．因此，点 B、B_1……都是直綫 l' 在把半平面裹在圓錐上的时候所变成的綫 l 的二重点．这种点的数目等于直角 $KO'C'$ 里面的射綫 $O'B'$、$O'B_1'$……的数目．因为这些射綫和 $O'C'$ 作成小于 $90°$ 而是$\frac{\alpha}{2}$的倍数的角，所以它們的个数就等于那种小于 90 而是$\frac{\alpha}{2}$的倍数(就是小于 180 而是 α 的倍数)的数目的个数．换句話說，假若 180 不能被 α 所整除，那末这种射綫的数目等于分数$\frac{180}{\alpha}$的整数部分．但若 180 能被 α 所整除，那末它們的数目等于$\frac{180}{\alpha}-1$．

要把这个定理完全証明，我們还应該指出，短程綫上所有

的二重点正就是从直綫 l' 上的点 B_i' 和 B_i'' 重合而得出的那种点。

事实上，假若在把半平面裹在圓錐上的时候，我們直綫 l' 上的兩个点变成了圓錐上的同一个点，那末我們就得到了短程綫 l 上的一个二重点。这就必須这兩点都距 O' 同样远，而且同在 l' 上。这就是說，这兩点必須在 l' 上关于 C' 对称。現設有兩点，一点我們叫它作 F'（参看图30），是在 C' 的左边，而另一点 F'' 是在 C' 的右边。假若点 F' 不是点 B'、B''、B_1'、B_1''……当中的任何一点，它必然要在角 $C'O'B'$、$C'O'B''$、$B'O'B_1'$、$B''O'B_1''$……当中某一个角的里面，在图30里，这些角我們用字母 S_i' 和 T_i' 分别标出。假若点 F' 是在角 S_i' 里面，那末和它对称的点 F'' 就在角 T_i' 里面，就是說，把半平面裹在圓錐上的时候，若点 F' 变成半圓錐 S 上的一点，那点 F'' 就变成半圓錐 T 上的一点；反过来，若点 F' 变成半圓錐 T 上的一点，那点 F'' 就变成半圓錐 S 上的一点。无論哪一种情形，F' 和 F'' 总变成圓錐上兩个不同的点。因此，除了重合的一对对的点 B' 和 B''、B_1' 和 B_1''……所得到的二重点之外，短程綫 l 上沒有新的二重点。这样我們就把这个定理証完了。

現在来討論兩条平行直綫 KL 和 l' 之間的帶形区域。我們建議讀者自己去研究一下，对于圓錐展开角 α 的各种不同数值（对于 $\alpha>180°$；$\alpha=180°$；$180°>\alpha>90°$；$\alpha=90°$；$90°>\alpha>60°$ 等等），这帶形区域在圓錐面上到底是处在什么样的情况。

重复上节末尾所作的論証，我們可以断定，繃紧了的彈性

細綫在圓錐面上是取短程綫的位置.

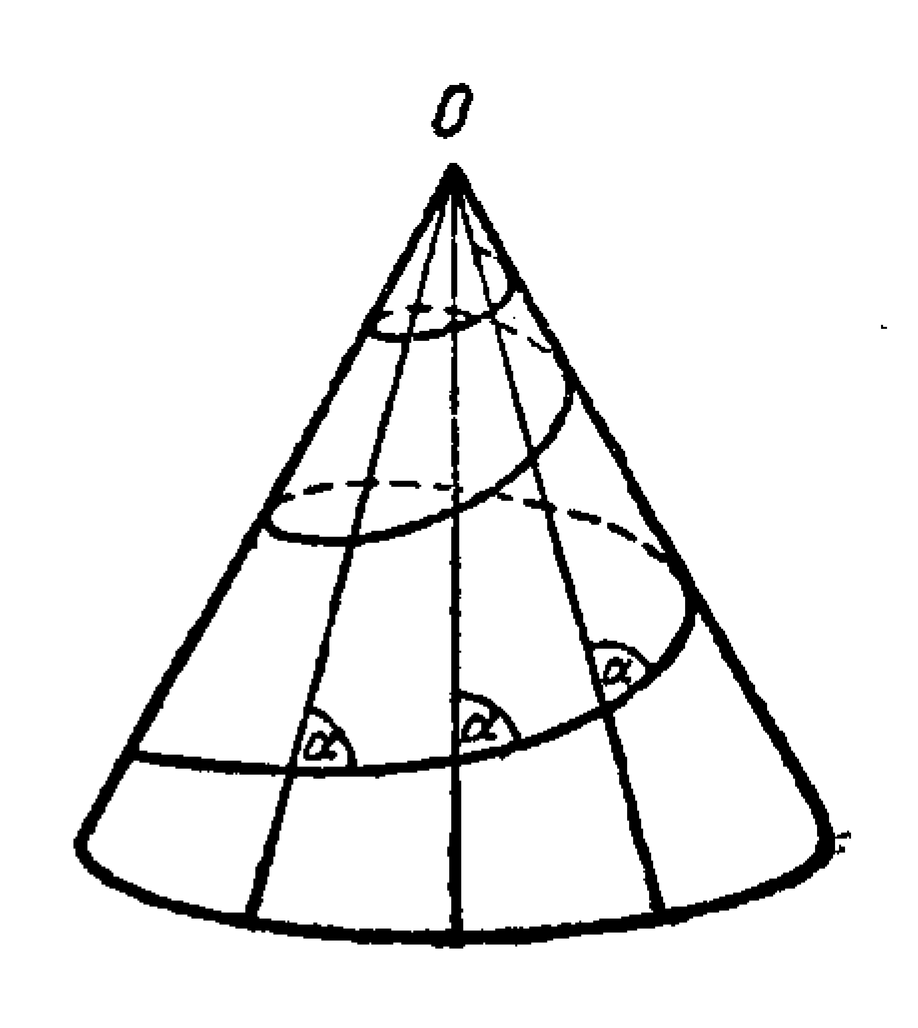


图 32.

注 在圓錐面上也可以研究螺旋綫，也就是和圓錐的所有母綫交成等角α的綫(图 32). 当$\alpha=0°$和$\alpha=90°$的时候，圓錐上的螺旋綫分别变成母綫和圓截綫. 当$\alpha\neq0$的时候，螺旋綫不是圓錐上的短程綫. 在这一点上，它和圓柱面上的螺旋綫不同.

4. 关于圓錐上的短程綫的克萊拉定理 設C是圓錐面上短程綫s的頂点，它和圓錐的頂点的距离是直綫段$OC=c$，和圓錐的軸相距r_0(图 33). 这样，短程綫在C和母綫OC垂直. 又設A是短程綫上的任意一点，r是点A和圓錐的軸的距离，α是短程綫s和母綫OA的交角，l是直綫段OA的長. 我們有关系式

$$l\sin\alpha=c. \tag{1}$$

要証明公式(1)，可以把圓錐面展开在平面上(图34). 这时候OC和OA变成$O'C'$和$O'A'$(長度c和l这时候保持不变)，短程綫s的弧$\overset{\frown}{AC}$变成直綫上的綫段$A'C'$，同时$O'C'$和直綫$A'C'$垂直；三角形$A'O'C'$里頂点A'的角等于α. 从三角形$A'O'C'$，我們得到：

$$l\sin\alpha=c,$$

这就是我們所要証明的.

注意，假若δ是圓錐的母綫和它的軸之間的交角(参看图33)，那末$r=l\sin\delta$. 用$\sin\delta$乘等式(1)的兩边，得到：

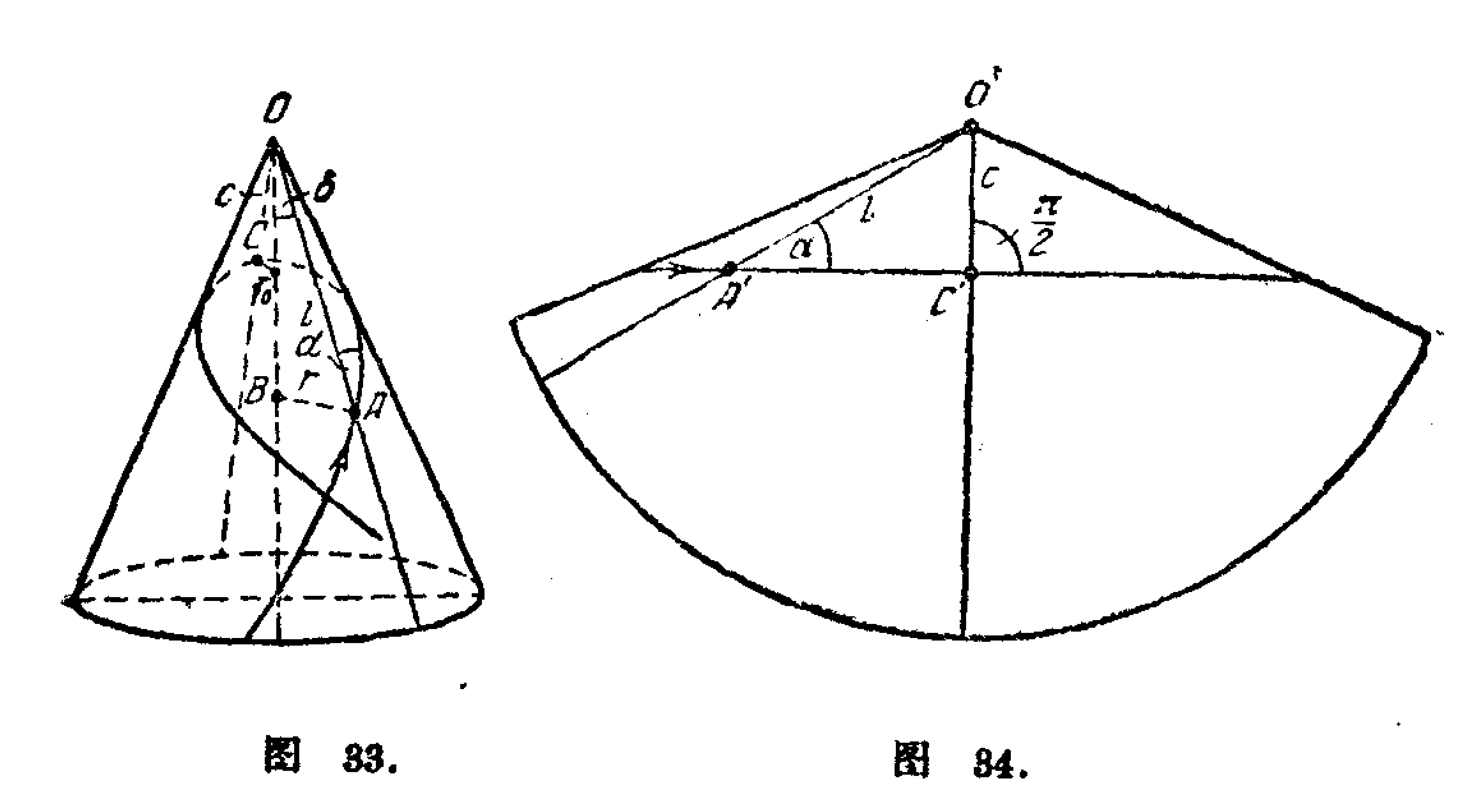


图 33. 图 34.

$$l \sin \delta \cdot \sin \alpha = c \sin \delta$$

或
$$r \sin \alpha = c_1, \tag{2}$$

这里的 $c_1 = c \sin \delta$ 是短程綫的一个定值。

上面的等式証明了下面的命題。

定理 3 对于錐式曲面上的短程綫 s 上的所有的点，量 $r \sin \alpha$ 是一个定值：

$$r \sin \alpha = \text{常数}, \tag{3}$$

这里 r 是点 A 到圓錐的軸的距离，α 是母綫 OA 和短程綫 s 的交角。

这定理是克萊拉定理的一个特殊情形(参看第 10 节)。

圓柱可以看作是圓錐的极限情形(圓錐的頂跑到无穷远处)。圓錐上的短程綫就相当于圓柱上的螺旋綫。显然，公式(3)对圓柱仍然保持有效：圓柱上所有的点到軸的距离 r 都是一样的，螺旋綫和圓柱母綫之間的交角 α 对于螺旋綫上所有的点也完全相同。

四　球面上的最短綫

1. 綫的長度　在研究圓柱面和圓錐面上的最短綫的时候，我們利用了这样的一个事实，就是圓柱面和圓錐面可以展开在平面上。但在研究球面上的最短綫的时候，这方法并不适用，球面不能展开在平面上。

我們現在来回忆一下，在初等几何学里我們是怎样証明，在所有連接兩定点的綫当中，直綫段有最小的長度。这性質是从三角形兩边的和大于第三边这一定理推出来的。換句話說，根据这一定理，我們可以証明：直綫段 AB 比所有有同样端点 $A_0=A$ 和 $A_n=B$ 的折綫 $A_0A_1A_2\cdots\cdots A_{n-1}A_n$ 都要短些（图 35）。事实上，假若用直綫段 A_0A_2 去代替折綫上相鄰的兩段 A_0A_1 和 A_1A_2，我們只会縮短折綫（因为三角形 $A_0A_1A_2$ 里 A_0A_2 边小于 A_0A_1 和 A_1A_2 兩边的和）①。这时候，我們已經用折綫 $A_0A_2\cdots\cdots A_{n-1}A_n$ 去代替折綫 $A_0A_1A_2\cdots\cdots A_{n-1}A_n$，这样就減少了一边。同理，在这条折綫里，相鄰的兩段 A_0A_2 和 A_2A_3 又可以用一边 A_0A_3 去代替，这不会增大折綫的長度。我們得到了折綫 $A_0A_3\cdots\cdots A_{n-1}A_n$，它的边数又減少了一边。这样，我們就可以順次把折綫的边数減

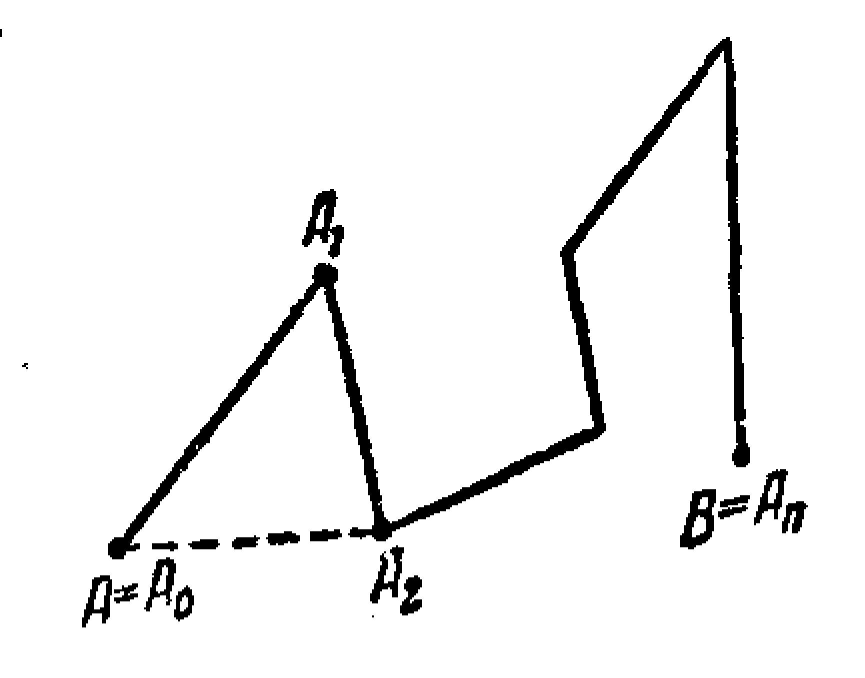


图 35.

① 假若 A_0、A_1、A_2 是在同一直綫上，那末兩段 A_0A_1 和 A_1A_2 長的和就等于 A_0A_2 这一段的長。因而在用 A_0A_2 这一段去代替兩段 A_0A_1 和 A_1A_2 的时候，我們沒有增大折綫的長度。这一点和以后的討論也有关系。

少，一直到把它減少到只有一边——直綫段 $A_0A_n=AB$. 在用一条折綫来代替另一条折綫的每一过程当中，折綫的長只会減小（有时候这長度保持不变；但它不能在每一过程都保持不变，因为这只有在所有的点 A_0、A_1……A_n 都在同一直綫 AB 上的时候才可能发生，而这种情形我們是已經除开了的）。由此可以推知，最初的那条折綫比直綫段 AB 要長．在初等几何学里只証明了直綫段 AB 比所有連接同样端点 A 和 B 的折綫都要短．

要想对連接 A、B 兩点的任意綫导出类似的結論，我們必須先对曲綫的長度下一个精确的定义．在初等几何学里，圓的周長的定义是內接多边形当边数趋于无限而最大边長趋于 0 的时候的周長的极限．

同理，我們也可以对任意曲綫的長下定义．假設已經給定了一条連接 A、B 兩点的綫 q（图 36）．我們沿这条綫順着从 A 到 B 的方向移动，并順次标出 $(n+1)$ 点：$A_0=A$，A_1，A_2……$A_n=B$．我們依次用直綫段把这些点連接起来．于是就得到了一条折綫 $A_0A_1A_2$……A_n，叫作**內接于我們曲綫的折綫**．我們現在来作**边数无限增多**的內接于曲綫 q 的折綫．同时我們要这样作出这条折綫，使得当它的边数无限增大的时候，**它的最大边的長趋于 0**．可以証明，**在这些条件之下，內接折綫的長会趋于一个极限，就取它来作为曲綫的長**．

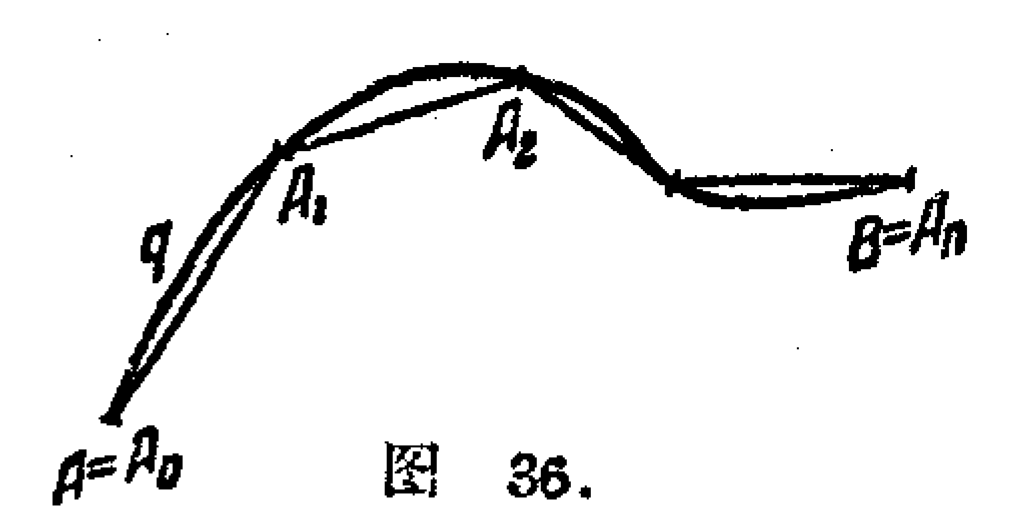


图 36.

因为直綫段 AB 比任何連接 A、B 兩点的折綫的長都要

短，而連接这兩点的曲綫的長是連接这兩点的折綫的長的极限，所以可以推知，直綫段是所有連接 A、B 的曲綫当中最短的一条綫。

2. 球面上的最短綫 我們現在来寻求球面上的最短綫。我們注意到，若球面上的兩点 A、B 不是在同一直徑的兩端，那过这兩点只能作唯一的一个大圓。过同一直徑的兩个端点却可以引无数多个大圓。后面这一情形我們暫时不来討論：說到球面上的兩点，我們都假定这兩点不是在同一直徑上。

过球面上給定的兩点 A 和 B 我們引一个大圓。A、B 兩点（因为它們不是同一条直徑的端点）把大圓分成兩个不相等的弧。我們用 $\overset{\frown}{AB}$ 記比較小的一个弧。

假設我們在球面上給定了三点：A、B、C，兩兩用大圓的弧 $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CA}$ 連接起来。这三个弧作成了一个所謂球面三角形 ABC；弧 $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CA}$ 叫作它的边。

对于球面三角形也有一个和普通（平面）三角形里关于边長的基本定理类似的定理。

定理 球面三角形的任一边小于其他兩边的和。

我們現在来研究用点 O 做心的球面上的球面三角形 ABC（图 37）。这三角形的 $\overset{\frown}{AB}$ 边是一个大圓的弧，也就是用 O 做心的圓弧；在这圓所在的平面上，弧 AB 对圓心角 AOB。同理，在 $\overset{\frown}{BC}$ 边和 $\overset{\frown}{CA}$ 边所在的平面上，这兩个弧分别对圓心角 BOC 和 COA。作为有同样半徑的大圓的弧，边 $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CA}$ 的長是和圓心角 AOB、BOC、COA 成正比的。

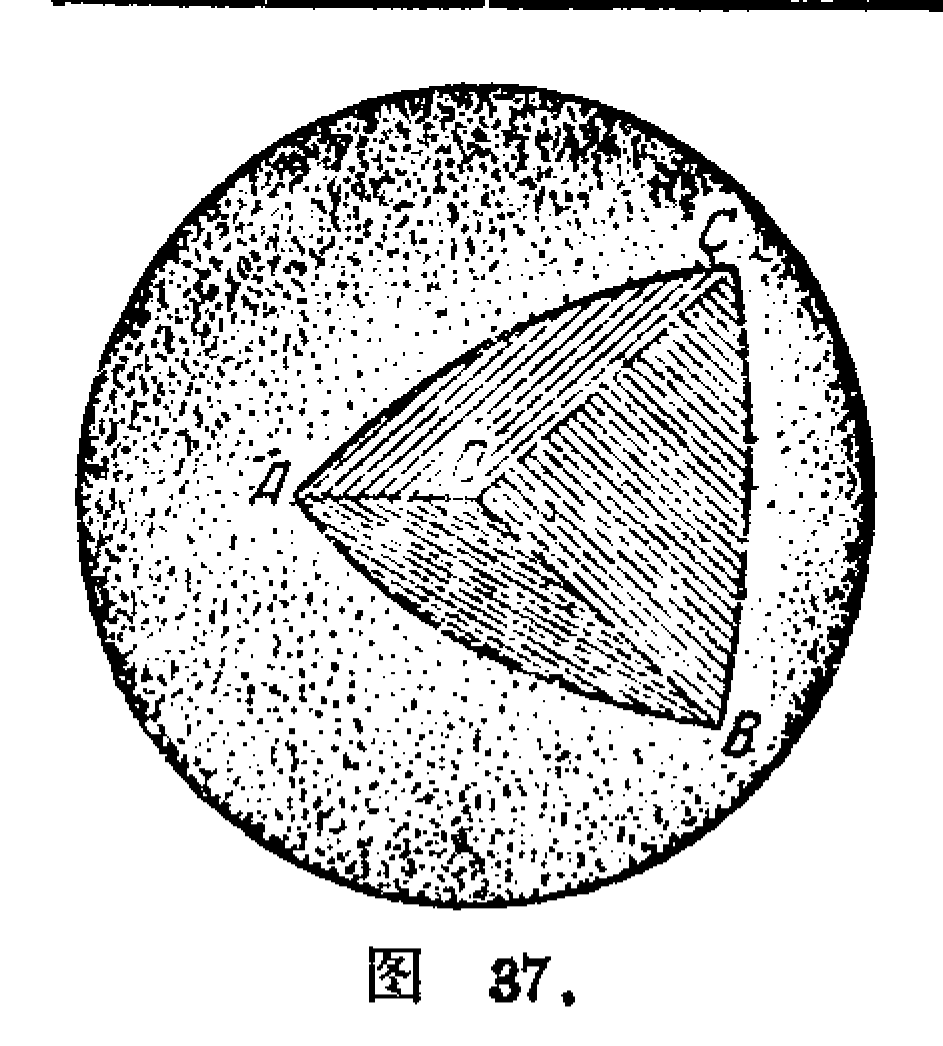


图 37.

我們大圓所在的三个平面作成一个三面角，它的頂点是 O，平面角是 AOB、BOC、COA. 我們的球面三角形的边長和我們的三面角里相应的平面角成正比. 但因在三面角里，每一平面角小于其他兩平面角的和. 所以对于和它們成正比的球面三角形的三边也有类似的不等式. 这就証明了我們的定理.

假設在球面上給定了一系列的点 A_0、A_1、A_2、A_3……A_n，順次用大圓的弧 A_0A_1、A_1A_2、A_2A_3……$A_{n-1}A_n$ 連接起来. 这些弧合起来叫作連接 A_0、A_n 兩点的**球面折綫**（图 38）.

对于平面来說，从三角形任一边小于其他兩边的和，就可以証明直綫段 AB 短于連接 A、B 兩点的折綫. 对于球面来說，同样也可以从球面三角形任一边小于其他兩边的和，推出大圓的弧 $\overset{\frown}{AB}$ 小于所有連接同样兩点的折綫. 再有，对于球面也正和对于平面一样，連接 A、B 兩点的曲綫的長可以从連接这兩点的球面折綫的長的极限得出. 因为大圓的弧 $\overset{\frown}{AB}$ 短于所有連接 A、B 兩点的球面折綫，所以它也短于所有連接这兩点的曲綫.

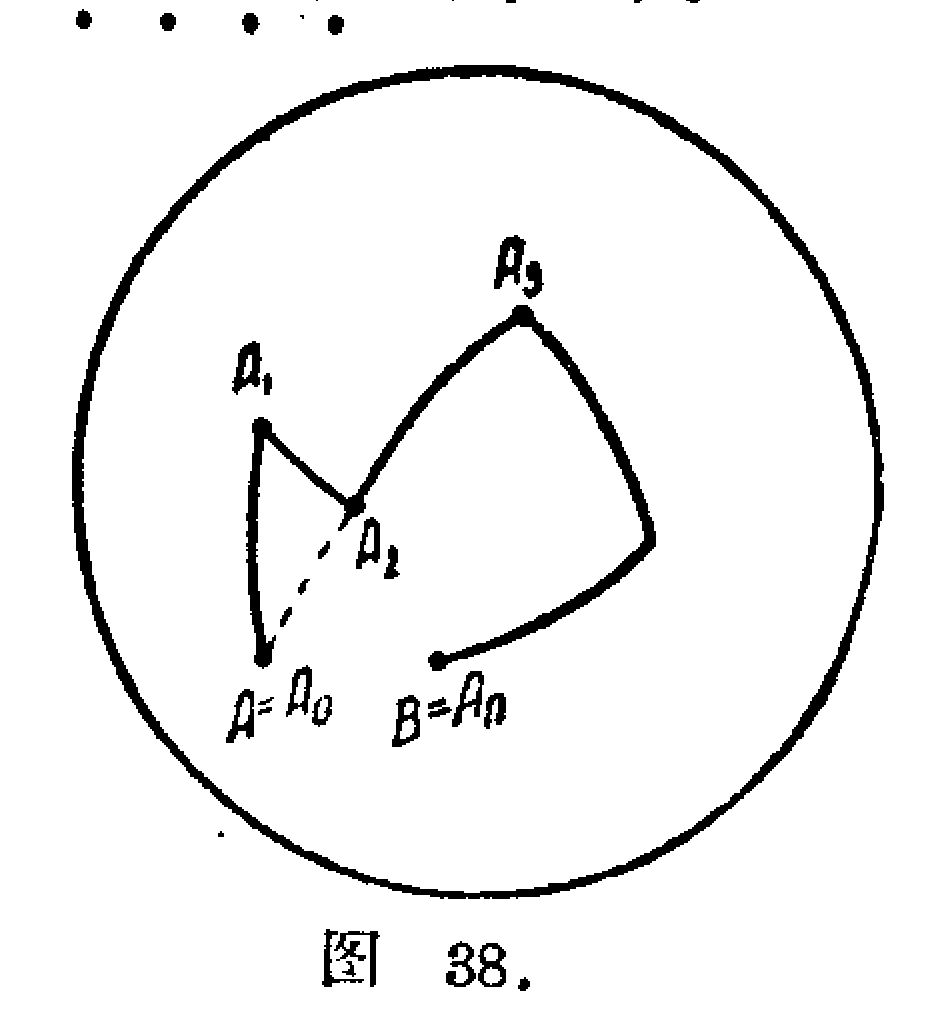


图 38.

弧 $\overset{\frown}{AB}$ 短于任何連接 A、B 兩点的折綫这一定理的証明

基本上是重复了平面上关于折綫的类似定理的証明．現設已經給定了弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和折綫 $A_0A_1A_2A_3\cdots\cdots A_n$，这里 $A_0=A$，$A_n=B$。

在球面三角形 $A_0A_1A_2$ 里，$\overset{\frown}{A_0A_2}$ 边小于 $\overset{\frown}{A_0A_1}$ 和 $\overset{\frown}{A_1A_2}$ 兩边的和①．我們用弧 $\overset{\frown}{A_0A_2}$ 去代替兩边 $\overset{\frown}{A_0A_1}$ 和 $\overset{\frown}{A_1A_2}$．于是就得到一条新綫 $A_0A_2A_3\cdots\cdots A_n$，它可能比原来的折綫短，而且少一条边．我們再用一边 $\overset{\frown}{A_0A_3}$ 去代替兩边 $\overset{\frown}{A_0A_2}$ 和 $\overset{\frown}{A_2A_3}$；經过这步手續，折綫的長只会減小或保持不变．我們再繼續作类似的变換（將折綫相鄰的兩边用一边去代替）．边的数目每一次減少，折綫的長只会減小或保持不变．这样我們得到了边数一条比一条少的連接 A、B 的折綫，最后終于得到了只有一条边的折綫，也就是弧 $\overset{\frown}{AB}$ 自己．在这一个过程当中，折綫的長总是減小或保持不变．但折綫的長不可能每步都保持不变，因为这就是說点 A_0、$A_1\cdots\cdots A_n$ 都在同一个大圓的弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上，而这种情形我們是已經除开了的．因此，原有折綫 $A_0A_1\cdots\cdots A_n$ 的長大于 $\overset{\frown}{AB}$ 的長．

我們現在来討論 A、B 兩点是在球的同一直徑的兩端的情形．在这种情形，有无数多个大圓的弧連接 A、B，并且用 AB 作它的直徑．它們全都是一样長．另一方面，所有連接 A、B 兩点的其他曲綫 q 都有比大圓的半周更大的長度．事实

---

① 假若点 A_0、A_1 和 A_2 在同一大圓上，那末，假若 $\overset{\frown}{A_0A_1}$ 和 $\overset{\frown}{A_1A_2}$ 兩边的和小于半圓周的話，$\overset{\frown}{A_0A_2}$ 边就等于这兩边的和，假若这兩边的和大于半圓周的話，$\overset{\frown}{A_0A_2}$ 边就小于这兩边的和．因此在用一边 $\overset{\frown}{A_0A_2}$ 代替兩边 $\overset{\frown}{A_0A_1}$ 和 $\overset{\frown}{A_1A_2}$ 的时候，折綫的長总只会減小或保持不变．这一点和以后的討論有关．

上，設点 C(A、B 以外的)在 q 上，把这綫分成兩条綫 (AC) 和 (CB)。作大圓的半周 $\overset{\frown}{ACB}$；它由兩段弧 $\overset{\frown}{AC}$ 和 $\overset{\frown}{CB}$ 組成。这兩段弧当中任一段都短于球面上連接同样兩点的任何其他曲綫。因为我們的曲綫 q 不是半圓，所以它的兩部分 (AC) 和 (CB) 当中至少有一部分不和相应的弧 $\overset{\frown}{AC}$ 或 $\overset{\frown}{CB}$ 重合。由是，(AC) 的長大于 $\overset{\frown}{AC}$ 的長。还有，(CB) 的長或大于 $\overset{\frown}{CB}$ 的長(假若它們兩者并不重合的話)或等于 $\overset{\frown}{CB}$ 的長(假若它們兩者重合的話)。由此可以推出，q 的总長大于 $\overset{\frown}{ACB}$ 的長。

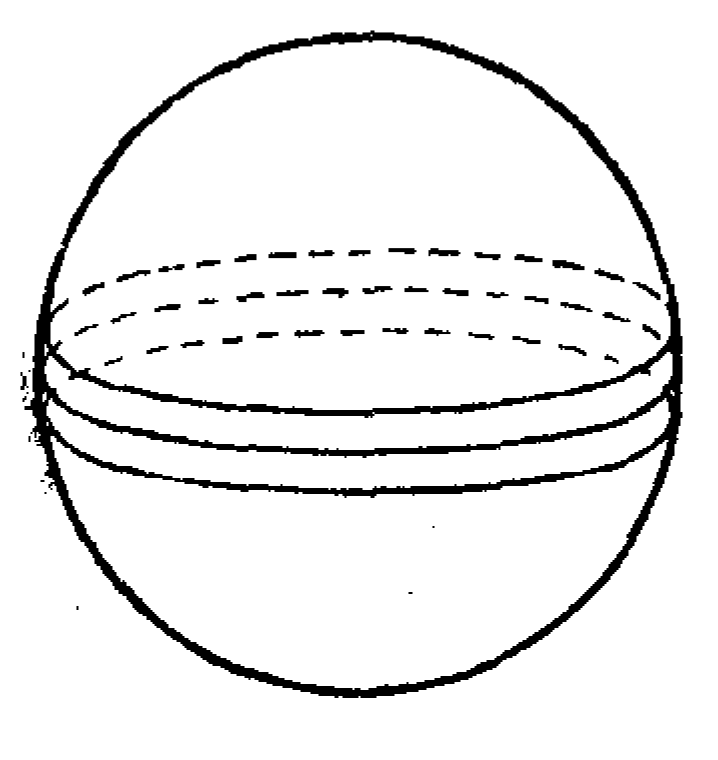
对于在直徑兩端的兩点 A 和 B，有无数多条連接这兩点的最短綫；这就是所有連接 A、B 兩点的大圓的半周。

3. **注** 假若不改变球面的形狀，就是說，假若不改变球面上的綫的長度，球面是不可能展开在平面上的。但是球面上沿着某一条綫 q 的极其狹窄的帶形，只要允許这狹窄帶形上的綫的長度可以有一点輕微的改变的話，却可以展开在平面上。而在球面上所取的帶形越窄，这种長度的改变就越小，就可以越精确地把这帶形展开在平面上。用极限論的話来說，那就是帶形上的綫的長度的改变和帶形的寬度比較起来是一个高阶无穷小的量。

若把球面上的一狹窄帶形展开在平面上，那末这帶形里的一段大圓的弧就变成一直綫段(逆命題也是对的)。

事实上，球面帶形上的大圓的弧 $\overset{\frown}{AB}$ 是帶形上面連接 A、B 兩点的弧当中最短的一条。假若在把帶形展开在平面上的时候，A、B 兩点分別变成了 A' 和 B'，那末弧 $\overset{\frown}{AB}$ 变成了平面上連接 A' 和 B' 的弧，而且比鄰近的其他連接这兩点的平面上的弧都短；因而 $\overset{\frown}{AB}$ 变成了直綫段 $A'B'$。

推論 我們在球面上沿着大圓兩側剪下一条狹窄的帶，然后把它剪断再展开在平面上。这帶形就变成平面上的矩形長条；大圓变成長



条的中綫．反过来，假若把一平面上的矩形的狭窄長条（帶子）卷在球面上，那末这長条在球面上必沿着大圓纏繞（图 39）．

我們現在来研究包含小圓（就是球面上大圓以外的圓）q 的一段弧的狭窄帶形变成了些什么．

图 39.

我們先指出下面的事实．我們用一个和圓錐的軸垂直的平面去截圓錐的面．这平面交圓錐的面于圓 q．各母綫从圓錐的頂点 O 到圓 q 的一段都相等(例如在图 40 里，$OA=OB=OC$)．假若沿母綫 OC 剪开圓錐的面并把这面展开在平面上，那圓 q 变成半徑等于 OC 的一个圓 q' 的一段弧．圓錐的面上用圓 q 作中綫的狭窄帶形展开在平面上成一帶形，用弧 q' 作它的中綫(图 41)．

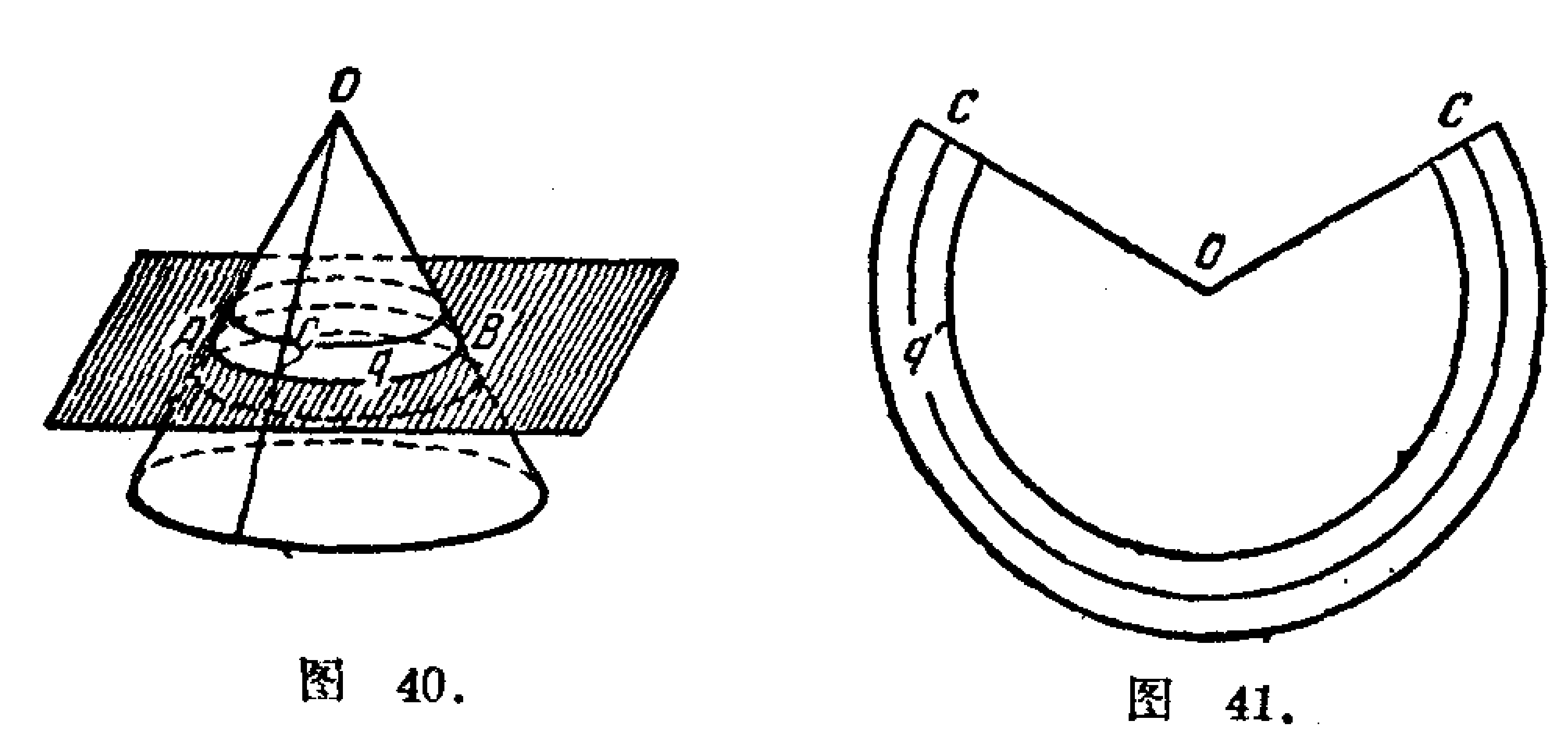


图 40.　　图 41.

我們現在回到球面上来(图 42)．过小圓 p_1 的中心 O_1 和球心 O 引直徑 AB；用 AB 作直徑作大圓 p，交小圓 p_1 于点 C．設 r 是 p_1 的半徑，R 是球的半徑，α 是角 O_1CO．我們有

$$\cos\alpha=\frac{r}{R}.$$

过点 C 引 p 的切綫 CD，和直徑 AB 的延長綫交于点 D. 我們有：$\angle CDO=\angle O_1CO=\alpha$（因兩角的相应边互相垂直）．由三角形 OCD，我們有：

$$CD=R\ \mathrm{ctg}\ \alpha=R\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$$

$$=R\left[\frac{r}{R}\div\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}\right]=\frac{Rr}{\sqrt{R^2-r^2}}.$$

現在把图形繞軸 AB 轉一周．这时候直綫 CD 就轉成一圓錐面；圓 p 就描成一个半徑 R 的球．这圓錐面和球面沿着圓 p_1 相切．

圓 p 上包含点 C 的一段微小的弧 C_1C_2 可以看成和切綫上的一段微小綫段一样①．当这段弧繞 AB 轉的时候，它就描出一个包含小圓 p_1 的球面帶形．这帶形可以看成和圓錐上的帶形一样②，这个圓錐就是剛才所說的沿着圓 p_1 和我們的球面相切的一个（圓錐面上的这一帶形就是由切綫上我們認为和弧 C_1C_2 一样的那一段轉成的）．若把这帶形沿 C_1C_2 剪开展开在平面上，那圓 p_1 就变成了一段圓弧，它的半徑等于 CD，就是半徑等于

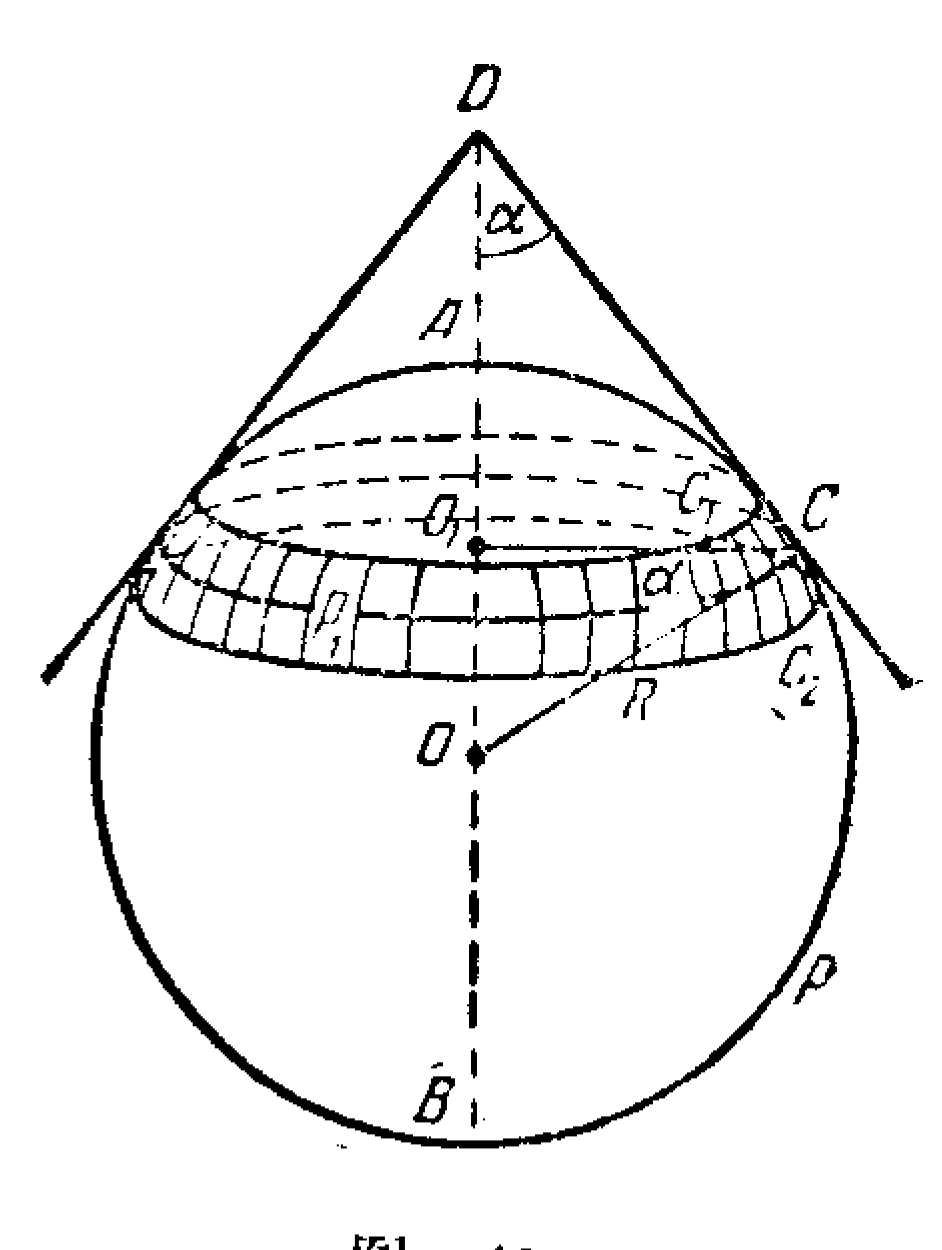


图 42.

$$l=\frac{Rr}{\sqrt{R^2-r^2}},$$

所以球面上用圓 p_1 作中綫的狹窄帶形，也就展开成一个平面上的帶

① 这里所謂一样是說，把和 C_1C_2 的長比較起来是高阶无穷小的量略去不計之后是一样的．

② 这里所謂一样，也是指和上一个注里同样的意义下說的．

形，它圍繞着用 l 作半徑的一段圓弧.

反过来，我們現在要把一个用半徑 l 的圓弧作中綫的狹窄的平面上的帶形卷在球面上．它一定沿一个小圓裹在球面上．这小圓的半徑是由下式

$$l=\frac{Rr}{\sqrt{R^2-r^2}}$$

确定的．不难証明，

$$r=\frac{Rl}{\sqrt{R^2+l^2}}.$$

第二章

平面曲綫和空間曲綫的几个性質以及有关的一些問題

五 平面曲綫的切綫和法綫以及有关的一些問題

1. 曲綫的切綫

設在平面上或空間里有某一曲綫 q 和 q 上面的一点 A（图 43）．我們現在来看这条曲綫上面的另一点 B．用直綫 n 連接 A、B 兩点．这直綫叫作割綫．把点 B

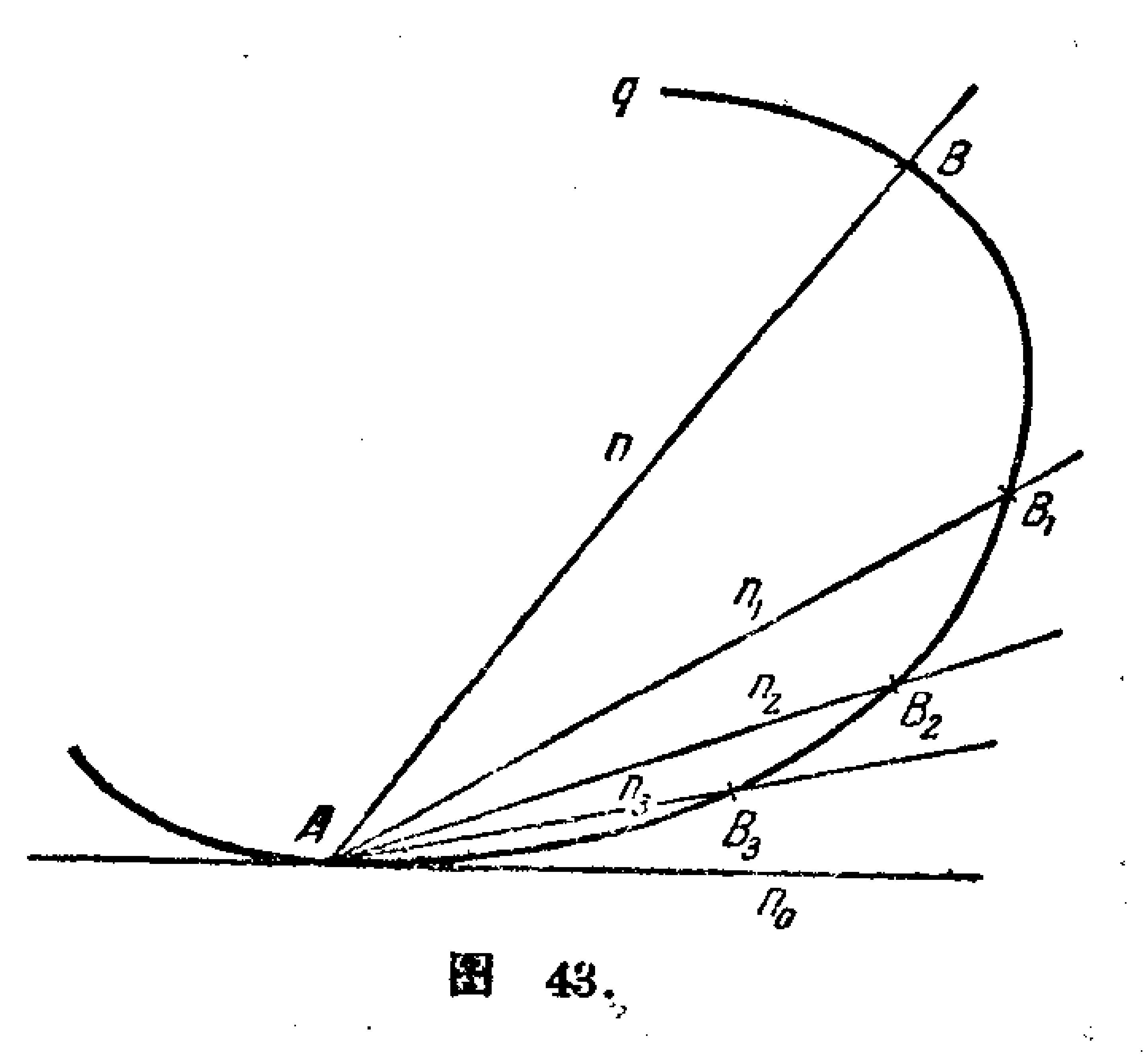


图 43.

沿曲綫 q 移近点 A；这时候割綫 n 就繞着点 A 轉．这就是說，当点 B 移动到点 B_1、B_2、B_3……的位置的时候，割綫 n 也就跟着移到直綫 AB_1、AB_2、AB_3……的位置．当点 B 趋于点 A，割綫 n 就趋于一个极限位置——趋于某一直綫 n_0．割綫的这一极限位置——直綫 n_0——叫作曲綫 q 在点 A 的切綫．

我們可以想象一个質点沿着曲綫 q 运动，它在点 A 离开曲綫．在离开之后，根据慣性，它就开始沿着我們的曲綫在点 A 的切綫 n_0 运动．

2．**法綫** 我們現在假定曲綫 q 是在某一平面上的(这样的曲綫叫作平面曲綫)．过点 A 和曲綫 q 在这一点的切綫 n_0 垂直的直綫 MN 叫作曲綫 q 在点 A 的法綫(图 44)．

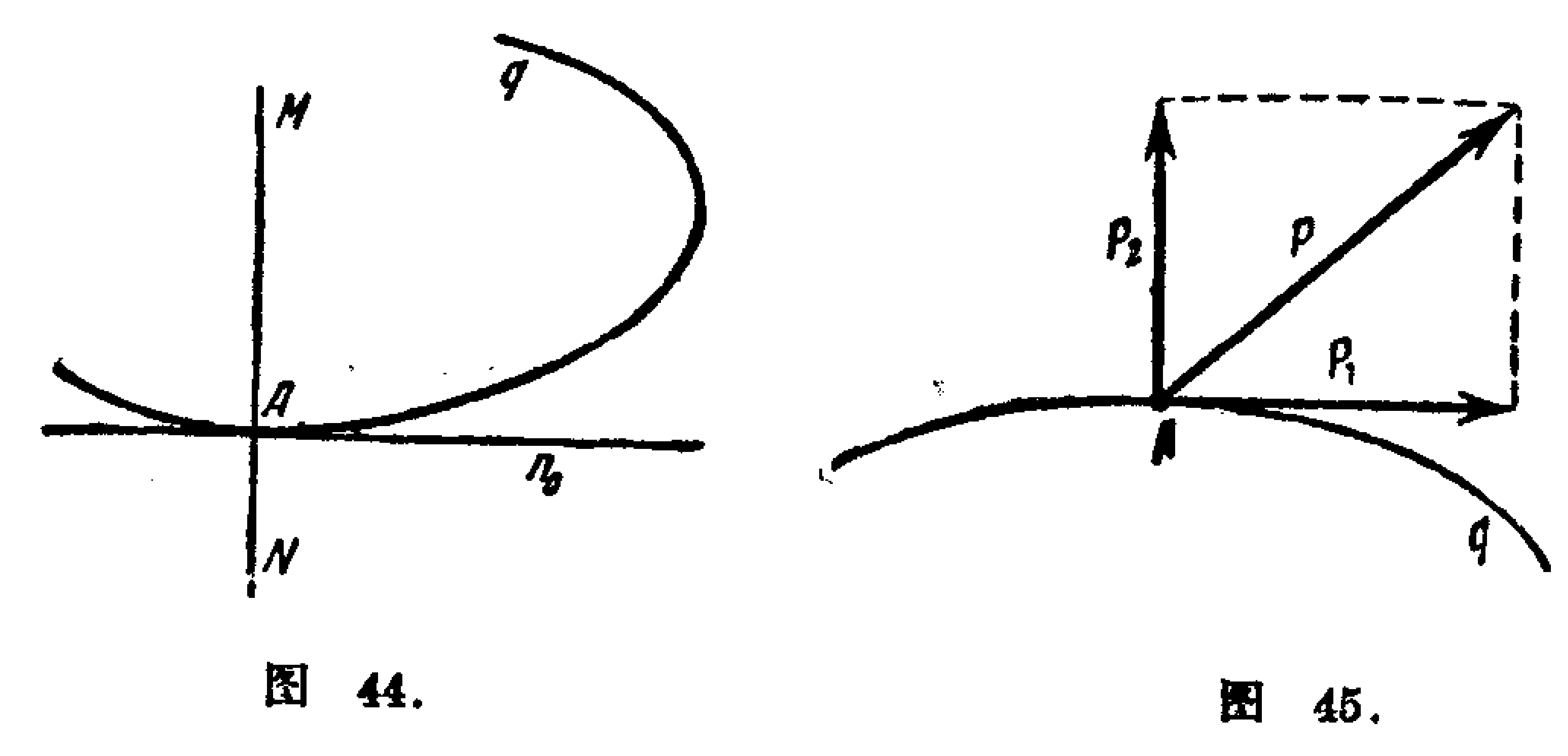


图 44.　　图 45.

3．**二曲綫間的最短距离** 我們現在来研究只能沿曲綫 q 移动的一点 A；設 P 是作用在点 A 的合力(图 45)．我們把力 P 分成兩个分力——切綫分力 P_1(朝着曲綫 q 在点 A 的切綫的方向上的)和法綫分力 P_2(朝着曲綫 q 在点 A 的法綫的方向上的)．切綫分力沿曲綫 q 推动点 A．因此，若缺少切綫分力，就是 P 和 P_2 相合，也就是說，若 P 朝着曲綫 q 在点 A

的法綫方向，那末点 A 就保持平衡。

再来研究兩条曲綫 q 和 q_1；我們要求出一端 A 在 q 上而另一端 B 在 q_1 上的許多綫当中最短的一条（图 46）。我們假定曲綫 q 和 q_1 固定不动而且是剛性的；現在来研究一条彈性細綫 r，它的一端 A 沿着曲綫 q 移动，另一端 B 沿着 q_1 移动（可以这样設想，比方說，在点 A 有一个套在曲綫 q 上的小环，在点 B 有另外一个套在 q_1 上的小环，細綫的兩端分別系在这兩个环上）。細綫 r 会尽力紧縮来取得一个使它的長度最小的位置。設 A_0B_0 就是細綫的这种位置，細綫在这种位置就会保持平衡。显然，A_0B_0 是連接 q 上的点 A_0 和 q_1 上的点 B_0 的一条直綫段（假若这条綫不是直綫段，那末保持兩端点位置不变，这条綫还可以縮短）。因为在 A_0B_0 位置的細綫是平衡的，所以它的端点 A_0 也一定在平衡狀态。在点 A 有一个沿着綫段 A_0B_0 方向的張力作用着。由上面所推出的曲綫上的点保持平衡的条件，可知直綫段 A_0B_0 是曲綫 q 在点 A_0 的法綫。同理可以証明，这条綫段也是曲綫 q_1 在点 B_0 的法綫。

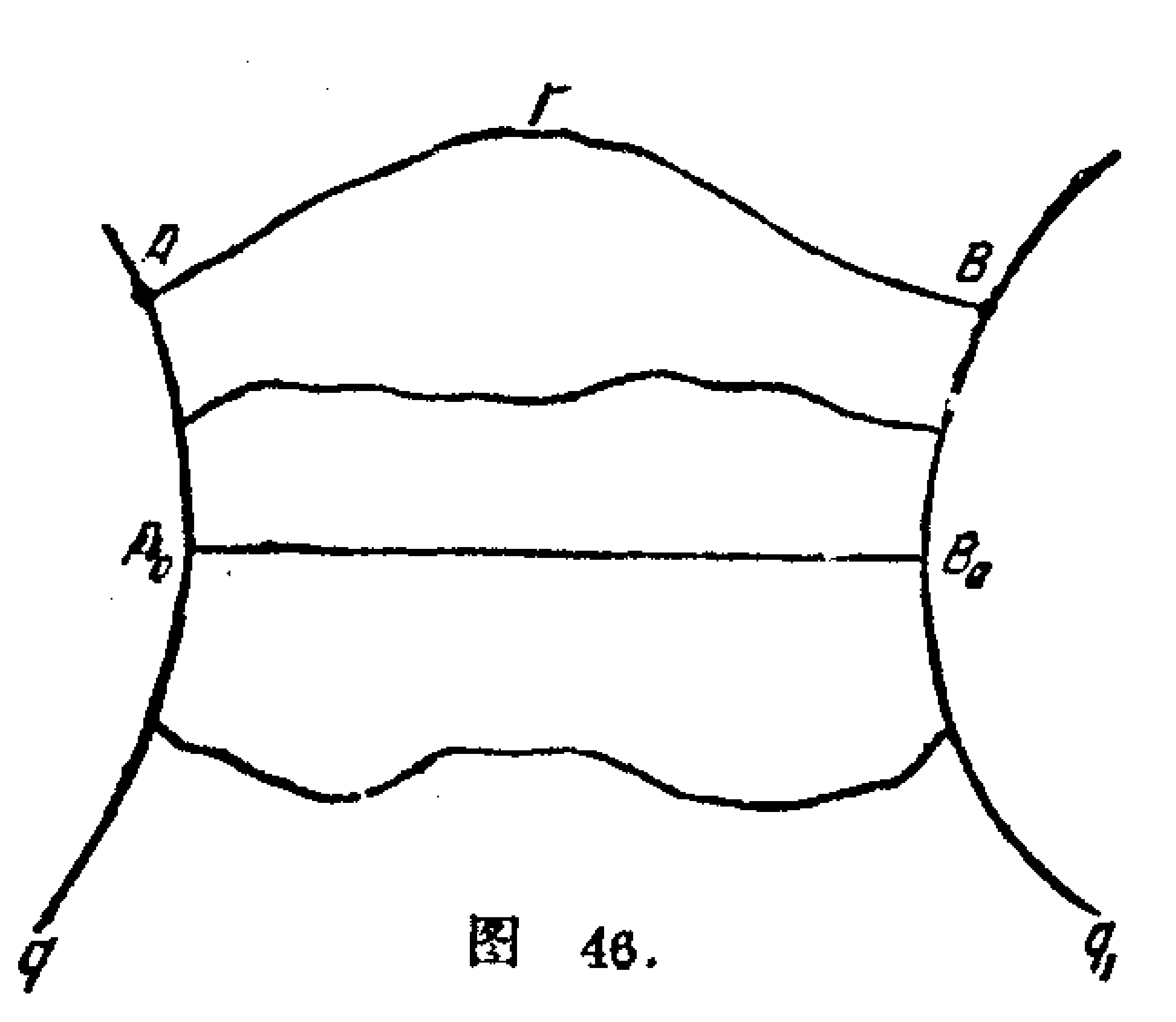


图 46.

因此，連接兩条曲綫上的点的許多綫当中，最短的是这兩条曲綫的公法綫。

同样，連接一点 A 和曲綫 q 的綫当中，最短的是曲綫 q 过

点 A 的法綫.

4. **关于反射的問題** 設 q 是一固定曲綫. 我們現在要討論連接給定的兩点 A 和 B 幷且和曲綫 q 有公共交点 C 的各种可能曲綫 ACB, 或者是所謂連接 A、B 兩点的經曲綫 q 反射的曲綫.

我們来研究兩端 A、B 固定而上面有一点 C 沿曲綫 q 移动的細綫 $\overset{\frown}{ACB}$(图 47).

設 AC_0B 是連接 A、B 兩点的經曲綫 q 反射的許多綫当中最短的一条 (C_0 是曲綫 q 上的点). 在 AC_0B 位置的細綫是处在平衡狀态的.

显然, 最短綫的兩个部分 AC_0 和 C_0B 都是直綫段. 細綫上的点 C_0 在曲綫上也处在平衡狀态; 在这一点上有兩个張力作用着, 就量上来說它們等于①: 朝着綫段 C_0A 的方向的力 T_1 和朝着綫段 C_0B 的方向的力 T_2, 它們的合力 T_0 朝着角 AC_0B 的平分綫的方向. 由平衡条件, 可知 T_0 是朝着曲綫 q 在点 C_0 的法綫方向的. 这就是說, 角 AC_0B 的平分綫是曲綫 q 在点 C_0 的法綫.

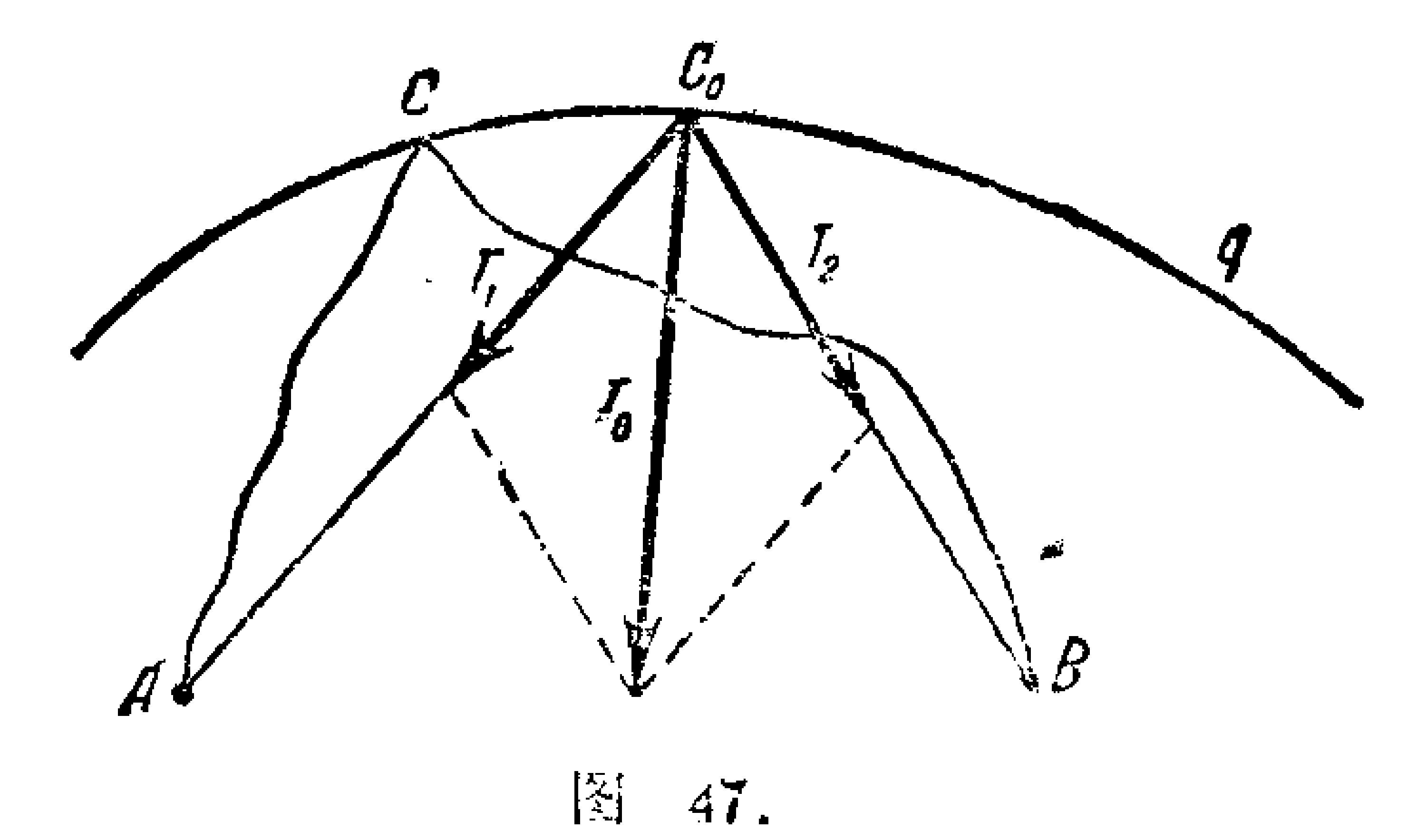


图 47.

① 在細綫上任何一点的張力都是一样.

連接 A、B 兩点的經曲綫 q 反射的曲綫当中最短的是折綫 AC_0B，它用曲綫 q 上这样的一点 C_0 做頂点，曲綫在这一点的法綫恰好就是角 AC_0B 的平分綫.

5. 域里的最短距离　我們現在要研究平面上由某一条綫所包圍的区域或者所謂域. 域可以是有限的(图 48 里的域Ⅰ)，也可以是无限的(例如同一图里从平面上除去域Ⅰ以后所得的域Ⅱ).

我們要求出在域Ⅰ里連接这域里的兩点 A、B 的綫当中最短的一条. 这条綫 $\overset{\frown}{AB}$ 是Ⅰ里系在 A、B 兩点的彈性細綫的平衡位置，这里域的边界被認为是有圍墻圍了起来的. 細綫可以包含域Ⅰ的边界 q 的某些部分。

設 $s_0=AD_1\overset{\frown}{E_1D_2}E_2\cdots\cdots\overset{\frown}{D_nE_n}B$ 是綫 s 当中最短的一条. 它是由边界的几个部分 $\overset{\frown}{E_1D_1}$、$\overset{\frown}{E_2D_2}\cdots\cdots\overset{\frown}{E_nD_n}$(在图 48 里 $n=3$)以及整个(除了端点)在Ⅰ里面的綫 AD_1、$E_1D_2\cdots\cdots E_nB$ 所組成. 显然，AD_1、$E_1D_2\cdots\cdots E_nB$ 的每一条都是直綫段.

边界上屬于 s_0 的部分 D_1E_1、$D_2E_2\cdots\cdots D_nE_n$ 都是凸向Ⅰ的这一側. 事实上，对于边界 q 上凸向Ⅱ这一側的每一充分小的部分 $\overset{\frown}{CC'}$，弦 CC' 都在Ⅰ里面；这弦比弧 $\overset{\frown}{CC'}$ 短；因此，假若綫 s_0 包含边界上的这种弧 $\overset{\frown}{CC'}$，我們用Ⅰ里面的弦去代替弧 $\overset{\frown}{CC'}$，就可以把 s_0 縮短.

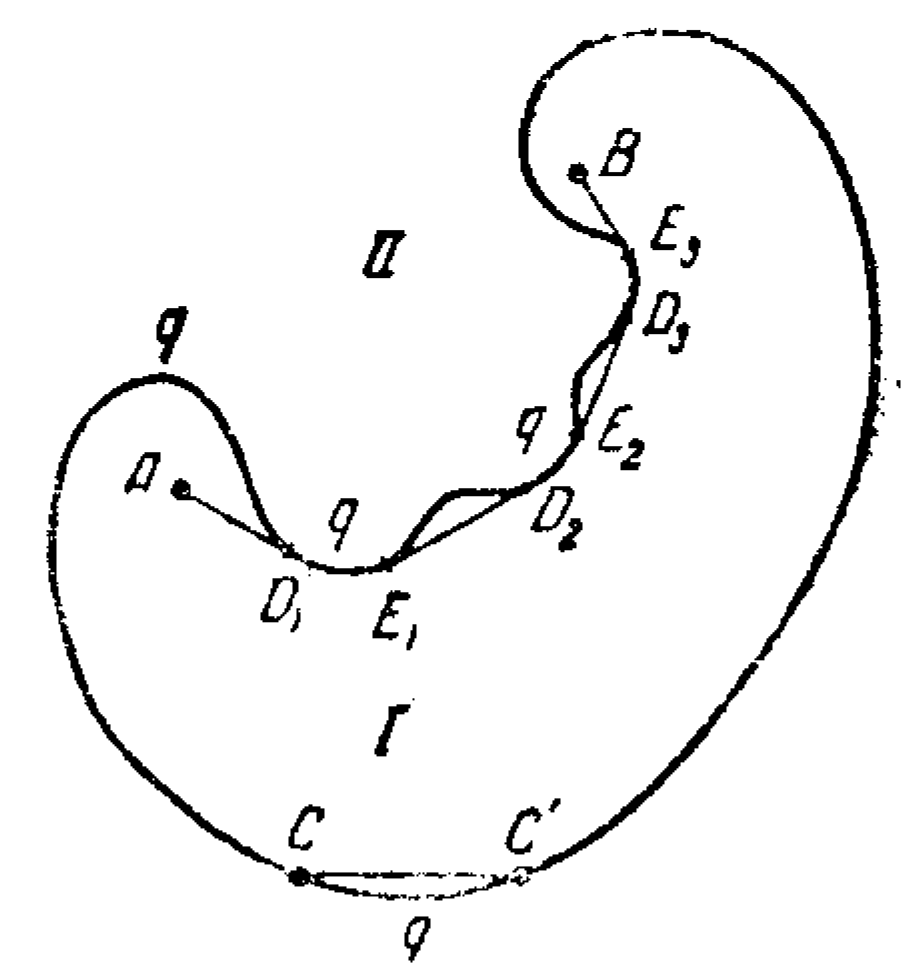


图 48.

这样，最短綫只能包含边界上

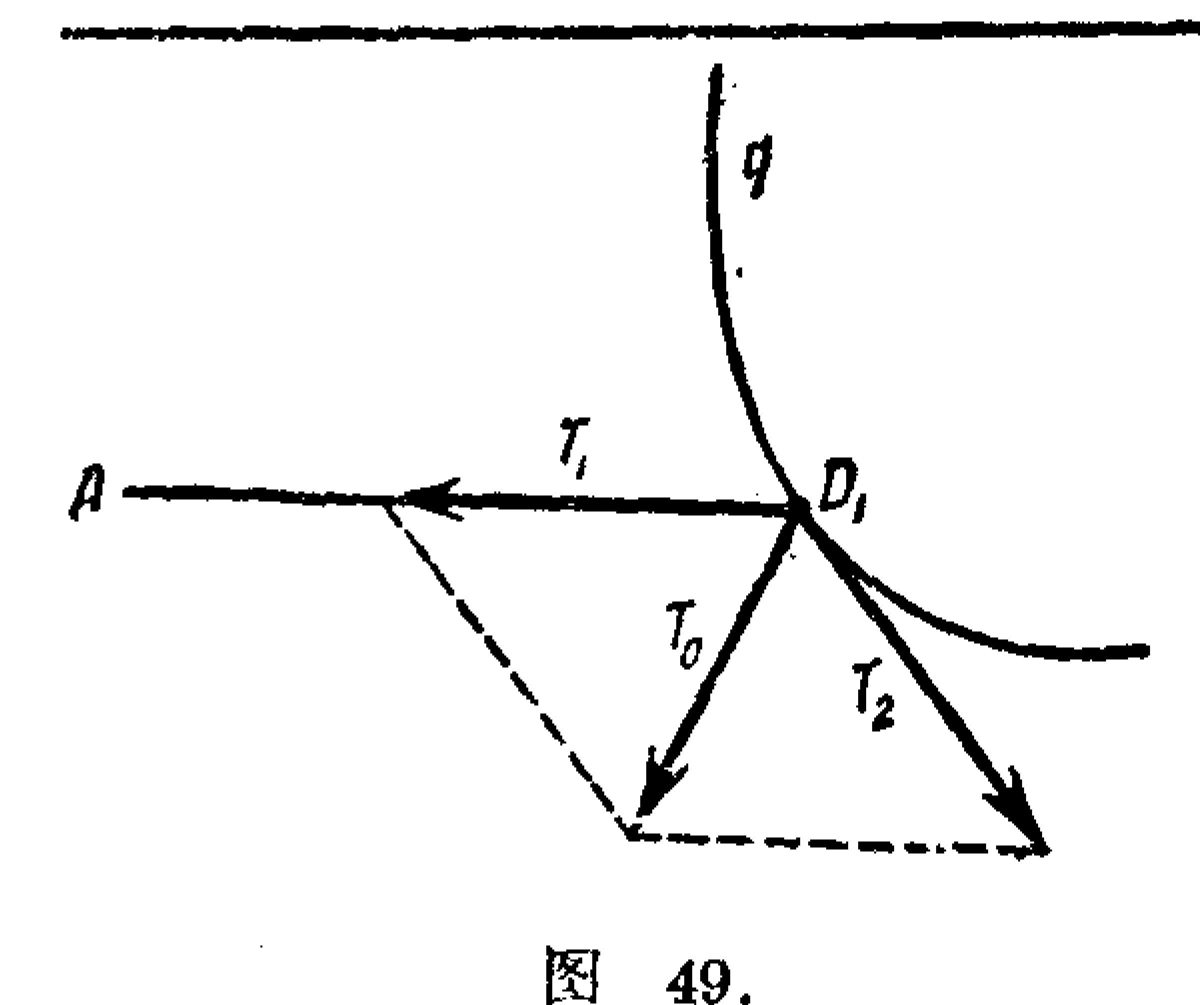


图 49.

凸向Ⅰ这一側的部分。

屬于s_0的組成部分的綫段AD_1、E_1D_2……$E_{n-1}D_n$、E_nB分别切曲綫q于点D_1、E_1、D_2、E_2……D_n、E_n(图48)。

事实上，例如在点D_1，細綫的兩个部分相遇：一个是綫段AD_1，一个是曲綫q的一部分$\overset{\frown}{D_1E_1}$。AD_1这一部分的張力T_1朝着綫段D_1A的方向(图49)，$\overset{\frown}{D_1E_1}$这一部分的張力T_2朝着q在点D_1的切綫方向。假若T_1和T_2的方向之間的交角不等于$180°$，那末力T_1和T_2的合力T_0就会推动点D_1(图49)，就是說，細綫就不能处在平衡狀态。所以这角一定等于$180°$，就是說，綫段AD_1切曲綫q于点D_1。

因此，在域Ⅰ里連接A、B兩点的最短綫是由切綫段AD_1、E_1D_2……E_nB以及边界上某些凸向Ⅰ这一側的部分D_1E_1、D_2E_2……D_nE_n所組成。

第10頁上在研究多面角的面上的最短綫的时候，关于展开面上直綫所在的位置我們曾經作了一些保留。根据本节所說的材料，以前所加的限制可以除去了。

六 平面曲綫和空間曲綫論里的几点知識

1. **密切圓** 假設給定一条平面曲綫q(图50)。在这曲綫上的点A我們作它的切綫KL和法綫MN；也作各种可能有

的在点 A 和直綫 KL 相切的圓（也就是在点 A 和曲綫 q 有公切綫的圓）；显然这些圓的中心都在法綫 MN 上。

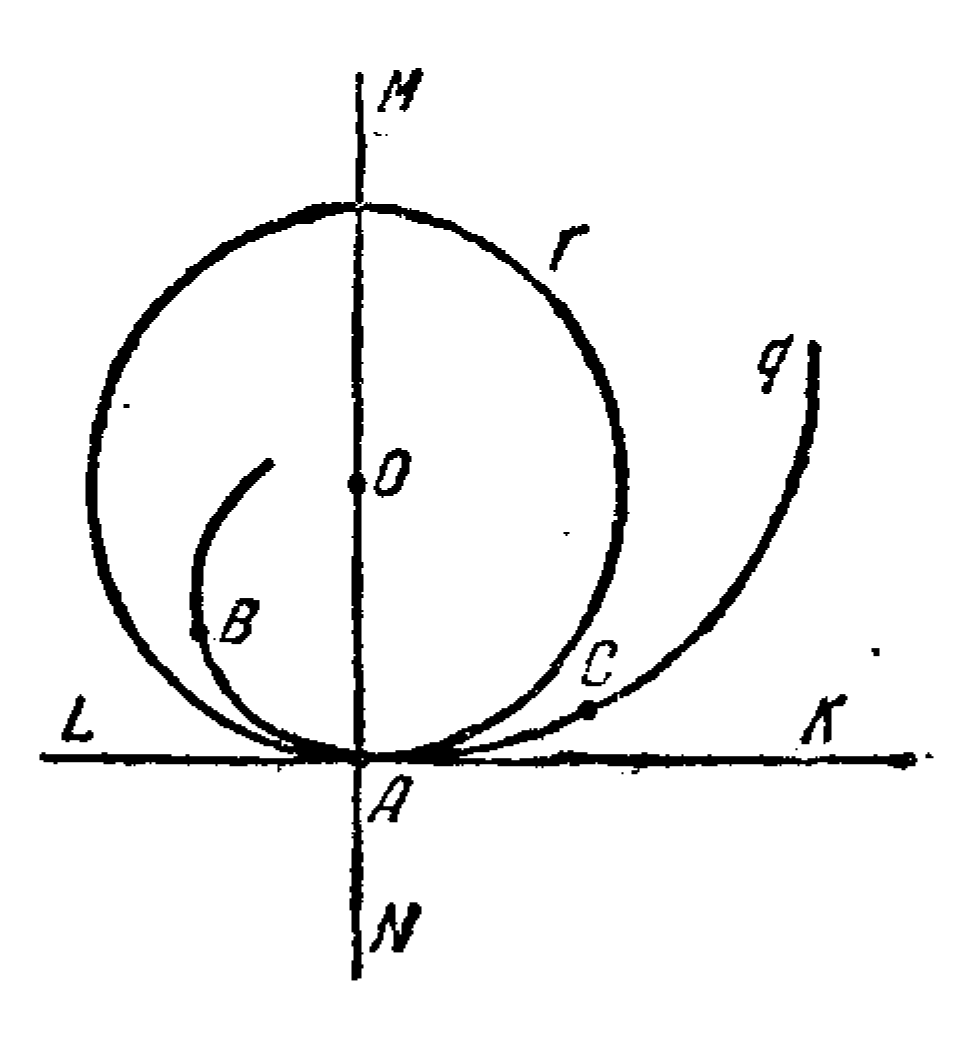


图 50.

在所有的这些圓上，有一个和曲綫 q 在点 A 最接近的圓．在我們的图里圓 r 就是这个圓．这圓叫作**密切圓**．曲綫 q 上包含点 A 的小弧 $\overset{\frown}{BC}$ 大致可以看成是密切圓的一个弧．弧 $\overset{\frown}{BC}$ 越小，我們就可以更精确地用圓 r 的弧去代替它．圓 r 的中心 O 有时叫作**曲率中心**．因此，曲綫 q 上包含点 A 的小弧 $\overset{\frown}{BC}$ 大致可以看成是用曲率中心 O 作圓心的一个圓弧．

圓心是在圓的兩条半徑的交点上，但因半徑是圓的法綫，所以我們可以說，圓心是在圓的法綫的交点上．

我們現在来研究一条任意的曲綫 q 和它上面的一点 A 以及包含这点的一条小弧 $\overset{\frown}{BC}$（图 51）．这弧大致可以看成是在点 O 的密切圓的一段弧．怎样寻求这圓的中心（曲率中心）呢？

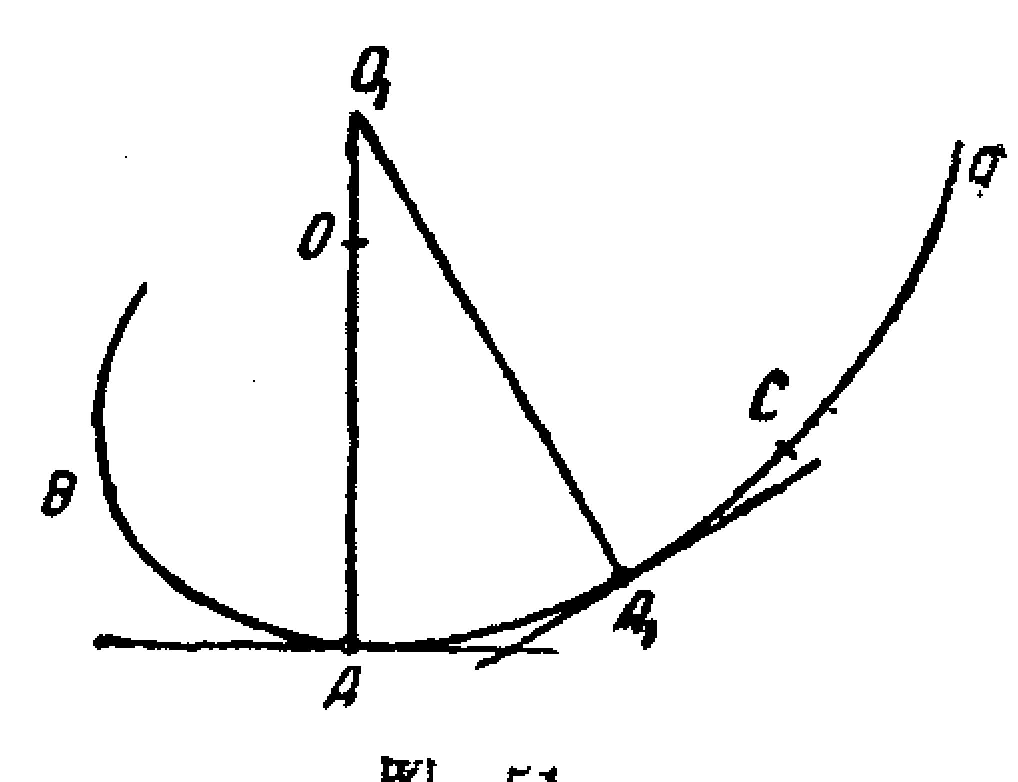


图 51.

因为我們把弧 $\overset{\frown}{BC}$ 大致看成是密切圓的一段弧，所以我們可以說出下面的曲率中心的作图方法．过点 A 和曲綫 q 上任意一个和它靠近的点 A_1 引 q 的法綫．这兩条法綫交于点 O_1．假若我們把弧 $\overset{\frown}{BC}$ 看成是

密切圓的一段弧，根据前面所說，点 O_1 也就是密切圓的中心(曲率中心)。

注 我們作密切圓心的方法是一个近似的方法. 弧 $\overset{\frown}{BC}$ 越小，我們的作法越精确. 我們可以对曲綫 q 在点 A 的曲率中心下一个(精确的)定义，那就是点 A 的法綫和 A 的鄰近一点 A_1 的法綫的交点当 A_1 趋近于 A 的时候的极限位置. 引第二条法綫的点 A_1 越靠近点 A，这兩条法綫的交点 O_1 就越接近极限位置 O. 密切圓可以这样下定义，那就是用 O 作中心、OA 作半徑的圓.

例 在图 52 里，我們用剛才的近似方法作出了橢圓在兩頂点 B 和 A 的曲率中心和密切圓.

2. 空間曲綫 前面我們研究了平面上的曲綫. 現在我們来研究空間里的曲綫. 我們注意到，的确有不能安放在平面上的曲綫存在. 比如螺旋綫就是这种曲綫.

事实上，假定我們在圓柱上給定一条螺旋綫 q；假若 q 可以安放在某一平面 Q 上，那它就是这个平面和圓柱的交綫. 这有兩种可能：或者平面 Q 和圓柱的軸相交，或者和圓柱的軸平行. 假若平面和圓柱的軸相交，那它就沿某一閉曲綫(沿橢圓，图 53)和圓柱面相交，而不是沿一条螺旋綫，因为螺旋綫不是閉曲綫. 又若平面和圓柱的軸平行，那它或

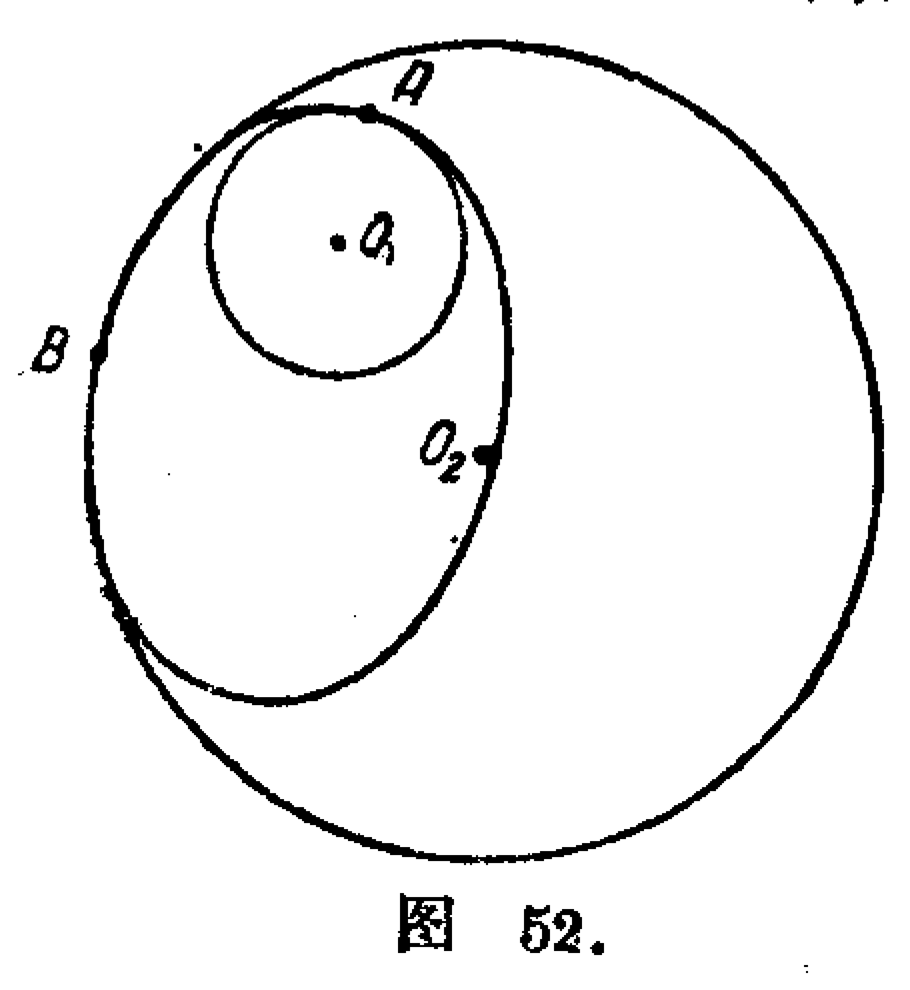


图 52.

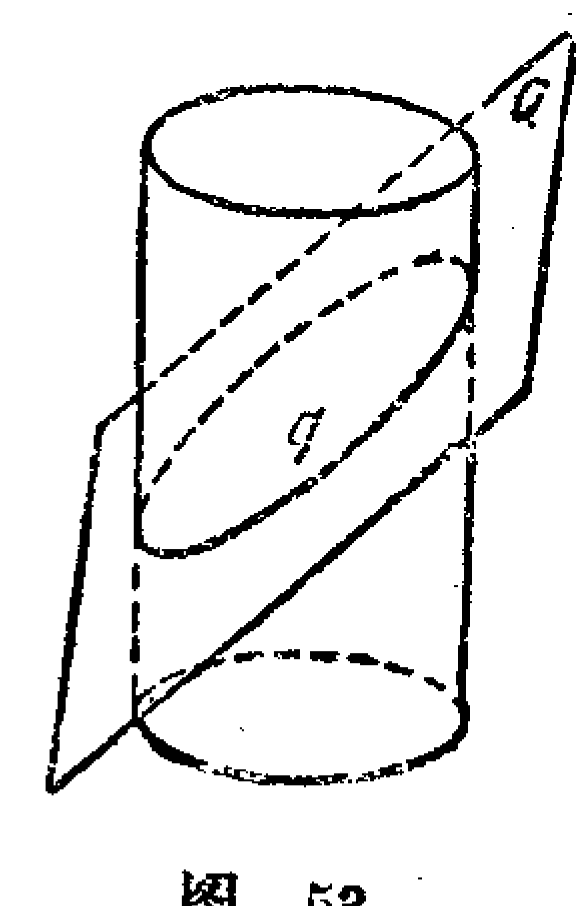


图 53.

者沿兩条直綫和圓柱面相交，或者和圓柱面相切因而有一条公共直綫，或者还可以和圓柱根本不相交．在任何情形，螺旋綫都不可能是平面和圓柱面的交綫．

空間曲綫的切綫也可以如同平面曲綫的情形一样下定义．設 A 是空間曲綫 q 上的一点，过点 A 和曲綫在这一点的切綫垂直的一切直綫都叫作 q 在点 A 的法綫．但在直綫上任一点在空間里可以作无数多条直綫和它垂直．因此，曲綫 q 在点 A 的法綫就有无数多条：它們塡滿了在点 A 和切綫垂直的整个平面（图 54）．

图 54.

3. 密切平面 我們在曲綫 q 上取一点 A，又在这一点作一条和曲綫 q 相切的直綫 MN（图 55）．假設 A_1 是曲綫上的一点，它和点 A 很接近．空間曲綫 q 的一段小弧 $\overset{\frown}{AA_1}$ 大致可以看成是一条平面曲綫的弧．过切綫 MN 和点 A_1 所引的平面 Q 大致可以看成是我們曲綫上的小弧 $\overset{\frown}{AA_1}$ 所在的平面．平面 Q 叫作曲綫 q 在点 A 的密切平面．

注 我們現在来給密切平面下一个确切的定义．过我們的曲綫在点 A 的切綫 MN 和同一曲綫上的另一点 A_1 引平面 Q'．設点 A_1 沿曲綫 q 移动趋于 A 点；这时候平面 Q' 要繞 MN 轉动而趋于一极限平面 Q．这极限平面就叫作密切平面．假若点 A_1 非常接近点 A，那过 MN 和点 A_1 的平面 Q' 就非常接近极限平面 Q．因此我們大致可以認为这种平面 Q' 就是密切平面．

4. 主法綫 曲綫 q 在点 A 的无数多条法綫当中，在密

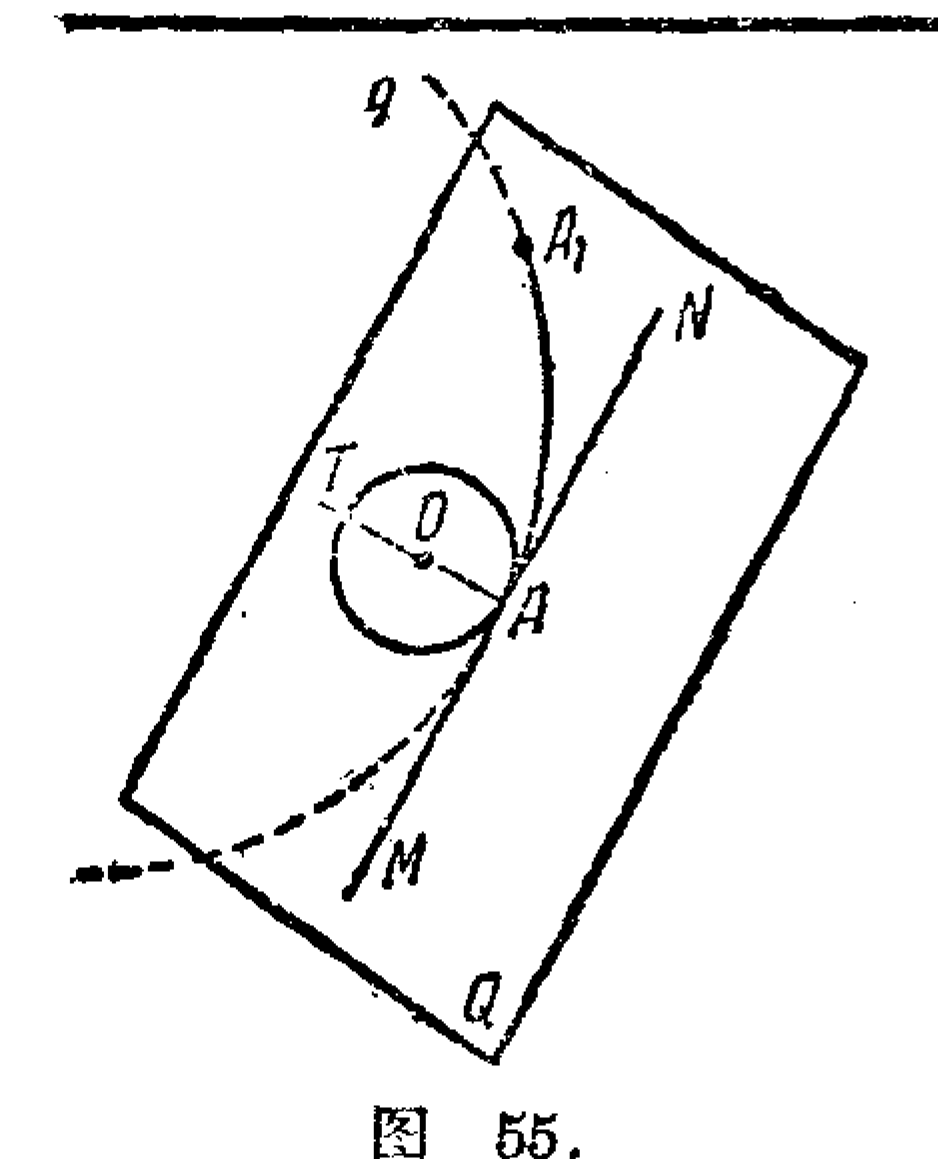


图 55.

切平面上的一条法綫 AT 叫作 q 在点 A 的主法綫 (图 55).

假若曲綫 q 全部在平面 Q 上(就是說,假若 q 是一条平面曲綫),那末平面 Q 就是曲綫 q 上一切点的密切平面,而 q 在这平面上的法綫也就是它的主法綫.

5. 空間曲綫的密切圓 空間曲綫 q 上包含点 A 的一段小弧可以大致認为是曲綫 q 在点 A 的密切平面上的一条平面弧. 但每一条平面弧本身也可以大致認为是密切圓(在这个平面上并和曲綫有公切綫的)的一段弧. 这就是說,曲綫 q 上包含点 A 的小弧大致可以看成是密切平面上某一圓的一段弧 (图 55). 这圓叫作空間曲綫的密切圓. 它的中心 O 在曲綫的主法綫上. 因此,平面曲綫和空間曲綫的一小段可以大致看成是密切圓的一段弧. 曲綫的弧越小,用密切圓的弧去代替曲綫的弧就越精确.

七 曲面論里的几点知識

1. 曲面的切面和法綫 我們現在来看曲面 S 和它上面的一点 A(图 56);曲面上环繞点 A 的一小部分可以大致看成是曲面 S 在点 A 的切面 Q 的一部分. 切面 Q 是这样的一个平面,曲面 S 上过点 A 的曲綫在点 A 的切綫都在这个平面上.

假若在 S 上过点 A 引兩条曲綫 q 和 q_1,它們在点 A 有不相同的切綫 LL_1 和 MM_1,那末切面 Q 就是由直綫 LL_1 和 MM_1

所决定的平面。

过点 A 并且和曲面 S 在点 A 的切面 Q 垂直的直綫叫作曲面 S 在点 A 的法綫。

曲面的法綫 AN 是这个曲面上过点 A 的一切曲綫的法綫(一般說来，它不一定是这些曲綫在这点的主法綫)。

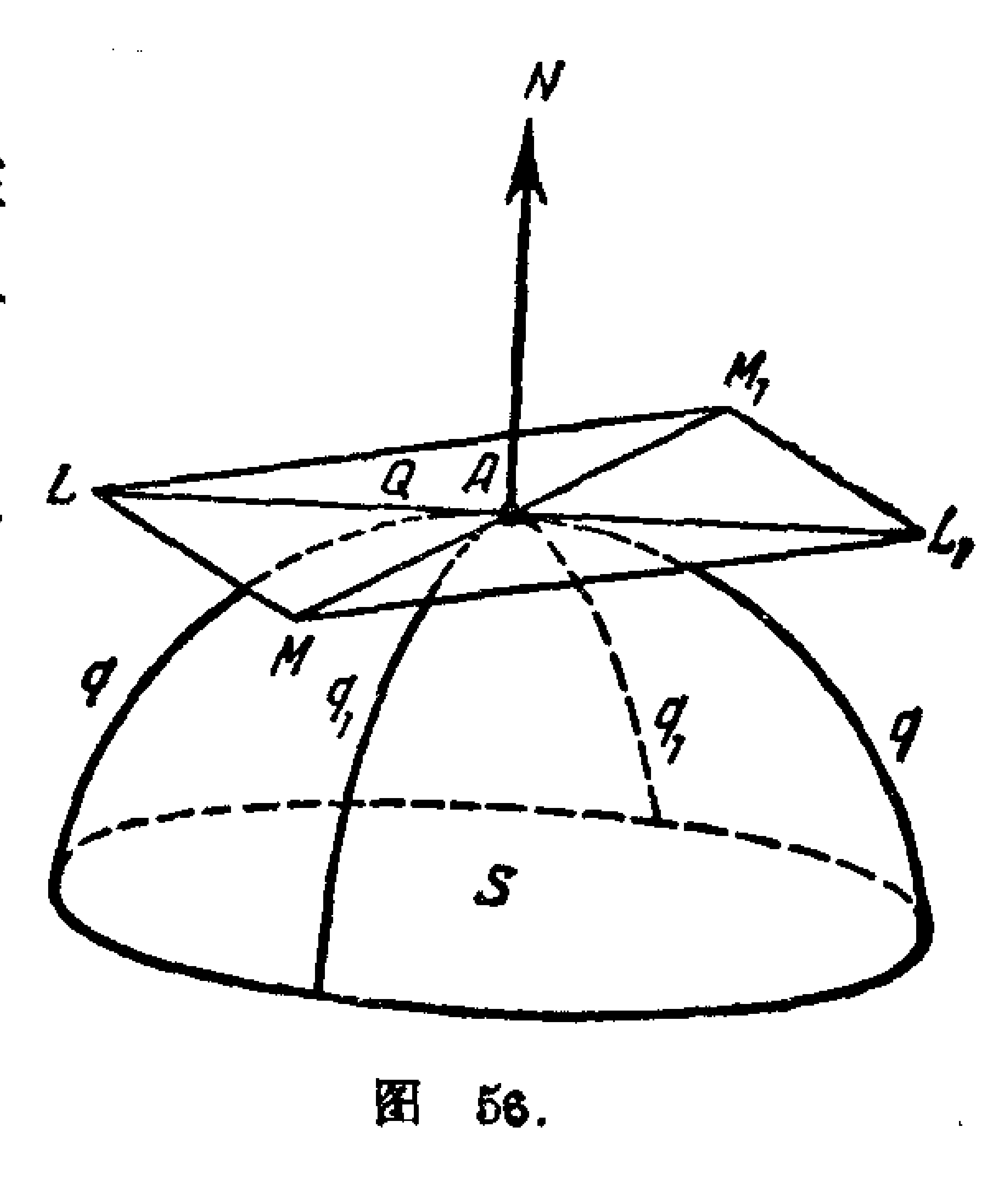


图 56.

例　球面在它上面某一点的法綫就是球在这一点的半徑。

圓柱面在它上面某一点的法綫就是圓柱在这一点的圓截綫的半徑。

注　曲綫不一定在它上面每一点都有切綫。例如我們可以取一条折綫；对于折綫，我們就不能确定它頂点的切綫。同样道理，空間曲綫也不一定有密切平面，曲面不一定有切面和法綫，等等。比如圓錐面在頂点就沒有切面和法綫。

在所有以后的討論里，我們只限于“平滑”曲綫，就是在每一点都有切綫、密切平面、曲率中心的曲綫，和“平滑”曲面，就是在每一点都有法綫的曲面。在曲面上，我們只討論“平滑”曲綫。

2. **点在曲面上保持平衡的条件**　我們現在来討論一个只能沿曲面 S 移动的点 A。設 P 是作用在这点上的合力(图57)。用 P_1 記力 P 的切綫分力(那就是在曲面 S 在点 A 的切面 Q 上的分力)，又用 P_2 記法綫分力，它朝着曲面 S 在点 A

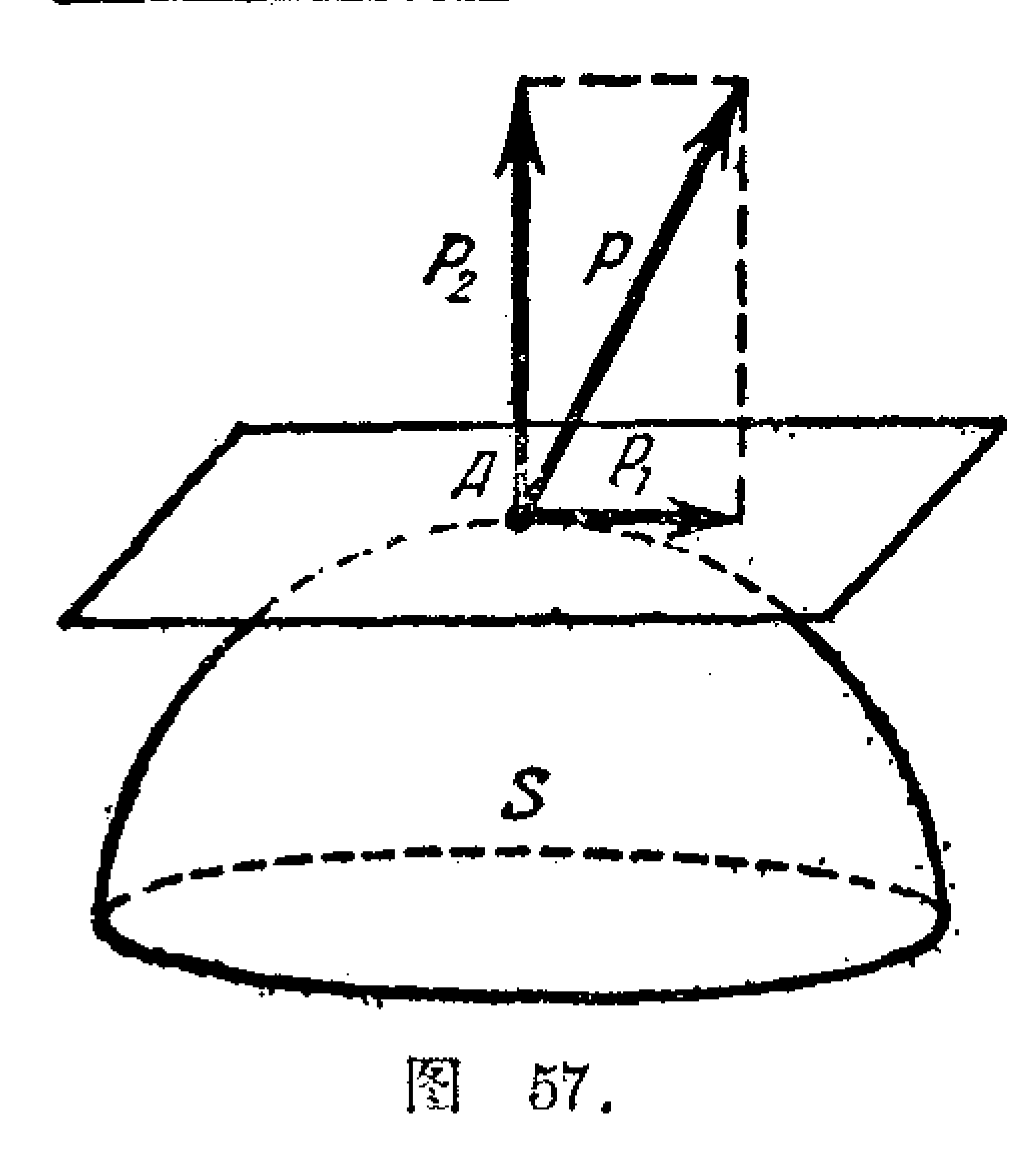


图 57.

的法綫方向．切綫分力 P_1 推着点 A 沿曲面移动，因此，要点 A 在曲面上保持平衡，必須切綫分力 P_1 是 0；这就是說，力 P 和它的法綫分力 P_2 相合．所以，要使点 A 在曲面上保持平衡，作用在点 A 的各个力的合力 P 必須朝着曲面在这点的法綫方向。

3. **空間里最短綫方面的一些問題**　試来尋求連接兩条空間曲綫上的点的最短綫．

重复第 5 节第 3 段的論証，我們可以証明連接兩条曲綫上的点的最短綫是它們的公法綫的一段。

特別的情形，在空間里兩条不相交的直綫上的点之間表示最短距离的綫就是它們的公垂綫的一段．

最后，同样可以証明，兩个曲面之間的最短距离就是它們的公法綫的一段．

第三章

短程綫（测地綫）

八　关于短程綫的約翰·伯努利定理

1. **彈性細綫在曲面上的平衡**　設在某一曲面 S 上給定了兩点 A 和 B．这兩点可以用曲面上的无数多条綫連接起

来。在这些綫当中已經找到了最短的綫 q。我們的任务就是要去研究这条最短綫的性質。

我們可以想象有一根在曲面上綳得很紧的系在 A、B 兩点的橡皮筋(图 58)。假若这条橡皮筋取最短綫 q 的形狀,那它就是在平衡狀态。事实上,假若我們多少变更它的形狀,使它离开了 q 的位置,那末我們就会把它拉長,而它要尽力縮短,就又会重新回到 q 的位置。因此,**落在最短綫 q 的位置上的細綫是在平衡狀态,而且是稳定的平衡。**

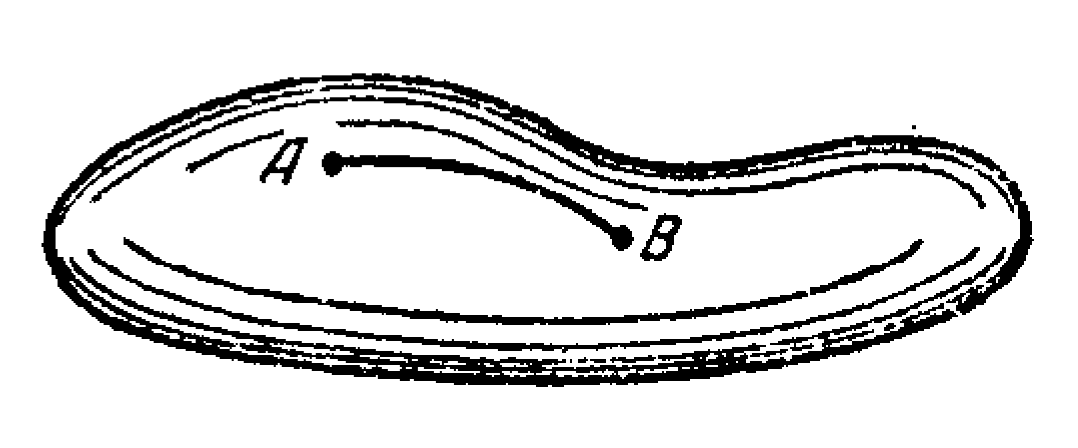


图 58.

我們現在就开始研究曲面上彈性細綫的平衡狀态的綫。

我們先来看一条圓弧形狀的細綫 $\overset{\frown}{AB}$(图59)。在我們的細綫上的一小段弧 $\overset{\frown}{CD}$ 上,受到細綫上其余部分的張力的作用;也就是說,細綫的 CA 部分的張力作用在点 C,DB 部分的張力作用在点 D。这些張力分别朝着細綫在C、D兩点的切綫方向。我們用 P_1 和 P_2 来記这兩个張力。就量上来說,力 P_1 和 P_2 是相等的,否則我們細綫的 $\overset{\frown}{CD}$ 部分就不会保持平衡狀态。我們現在来求 P_1 和 P_2 的合力。

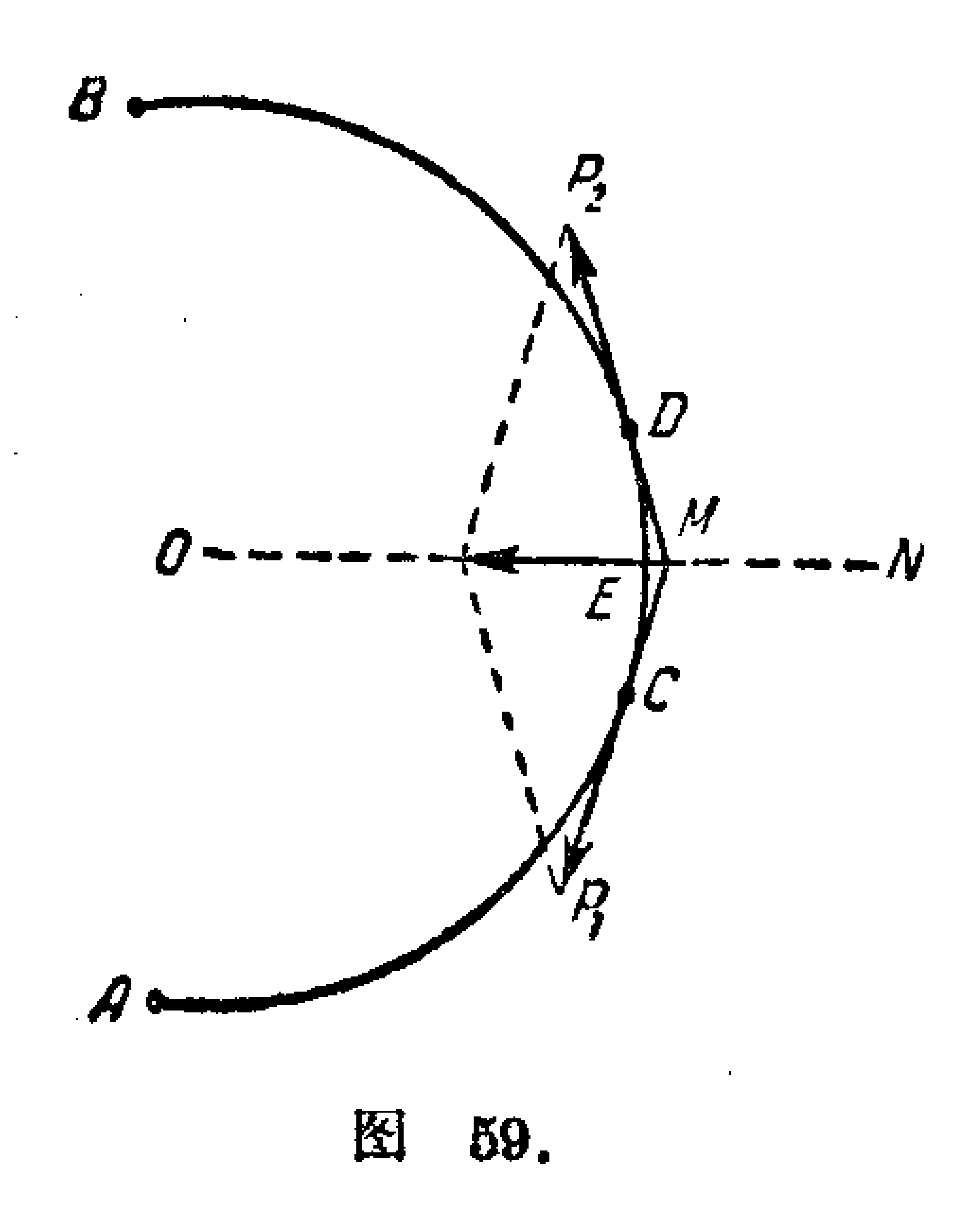


图 59.

設点 M 是 C、D 兩点的切綫的交点(力 P_1和P_2就是朝这兩条切綫方向的)。我們把力

P_1 和 P_2 移到点 M. 容易看出,合力是朝着圓(細綫 $\overset{\frown}{AB}$ 所在的)的中心 O 的. 用 E 記 $\overset{\frown}{CD}$ 的中点. 作用在 $\overset{\frown}{CD}$ 上的張力的合力經过这段弧的中点 E,并朝着半徑 EO 的方向. 因为半徑 EO 是弧 $\overset{\frown}{AB}$ 在点 E 的法綫,所以結果我們得到:作用在圓弧 $\overset{\frown}{CD}$ 上的張力的合力經过这弧的中点 E,并且朝着圓在点 E 的法綫方向.

我們現在来討論普遍情形. 假設系在 A、B 兩点的橡皮筋已經在曲面上綳紧,它的形狀和曲綫 q 相同.

我們在这細綫上挑出一段小弧 $\overset{\frown}{CD}$①. 在 C、D 兩点上朝着 q 在这兩点的切綫方向的張力 P_1 和 P_2 作用在 $\overset{\frown}{CD}$ 上. 我們可以把我們曲綫的一段小弧看成是在这弧的中点 E 的密切圓弧. 这圓的半徑 EO 朝着曲綫 q 在点 E 的主法綫方向. 作用在圓弧上的張力的合力是順着穿过这弧的中点的半徑的,在現在的情形就是順着半徑 EO. 所以,作用在我們細綫的小弧 $\overset{\frown}{CD}$ 上的張力的合力經过弧的中点 E,并朝着在点 E 的主法綫 EO 的方向.

現在已經不难求出使得細綫处在平衡狀态的条件. 假若細綫处在平衡狀态,那末它的每一小部分 $\overset{\frown}{CD}$ 也处在平衡狀态. 要使 $\overset{\frown}{CD}$ 处在平衡狀态,必須这合力朝着曲面的法綫方向. 作用在 $\overset{\frown}{CD}$ 上的張力有朝着曲綫 q 的主法綫 EO 的方向的合力. 这就是說,同一直綫 EO 必須同时是曲綫 q 在点 E 的主法綫和曲面 S 在这一点的法綫.

---

① 因为 $\overset{\frown}{CD}$ 很小,我們可以把它看作一个圓弧,因而可以利用图 59.

現在我們得出定理：要想在曲面 S 上绷紧了的橡皮筋 q 处在平衡狀态，必須在它上面的任意一点 A 的主法綫和曲面的法綫相合。

2. **短程綫** 假若在曲面 S 上的綫 q 上的每一点，q 的主法綫和曲面 S 的法綫相合，q 叫作曲面 S 上的短程綫.

短程綫也可以这样下定义：它是曲面上这样的曲綫，在它上面每一点的密切平面必过曲面在这一点的法綫. 事实上，設 A 是曲面 S 上的一条曲綫 q 上的一点. 曲面在点 A 的法綫同时也是曲綫 q 在这点的法綫；假若这条法綫是在曲綫 q 在点 A 的密切平面上，它也就是主法綫.

上面所証明的定理可以叙述成：

紧绷在曲面上的細綫若是在这个曲面的一条短程綫上，它必处在平衡狀态.

例 1 绷紧在圓柱面上的細綫，如我們上面所証，是沿着螺旋綫的. 因此，螺旋綫就是圓柱面上的短程綫. 螺旋綫的主法綫和圓柱面的法綫相合，而圓柱面的法綫又是圓截綫的半徑. 所以，螺旋綫的主法綫是圓截綫的半徑.

例 2 我們現在来研究，在什么样的情形之下，平面曲綫 q 可以是某一曲面 S 的短程綫. 用 Q 記綫 q 所在的平面. 对于平面曲綫 q 說来，在它上面任何一点的密切平面也就是平面 Q.

由短程綫的第二定义，假若 q 是短程綫，那末曲面 S 在曲綫 q 上各点的法綫必然在 q 的密切平面上，那就是說，曲面 S 在曲綫 q 上各点的法綫必然在平面 Q 上.

例 3 我們現在考虑球面．用过球心的一个平面 Q 截这曲面．我們就得到了球面上的所謂大圓．大圓是球面上的短程綫．

事实上，球面在大圓上各点的法綫是球的半徑．在大圓上各点的半徑是在这圓所在的平面上的．我們有了一个曲面上的平面曲綫的例子，曲面在这曲綫上各点的法綫都在这曲綫所在的平面上．而我們剛才証明过，这样的平面曲綫是短程綫．

假若我們用一个不过球心的平面 Q_1 截球面，我們就得到球面上的一个小圓．因为球面在小圓上各点的法綫（就是球的半徑）不在小圓所在的平面上，所以小圓不是球面的短程綫．

順着大圓弧绷紧的橡皮筋是处在平衡狀态的．但若它是沿着小圓弧绷紧，那它就要从上面滑下来，因为它在这上面不是处在平衡狀态．

約翰·伯努利定理 連接曲面上兩点的許多綫当中，最短的是短程綫弧．

我們已經有了伯努利定理的証明．事实上，我們一方面已經証明了，一条曲綫，假若橡皮筋在曲面上沿着它绷起来是处在平衡狀态，那它就是一条短程綫．另一方面，我們知道，曲面上系在 A、B 兩点的橡皮筋，若它是在連接这兩点的最短綫的位置上，那它就处在平衡狀态．

注 过球面上兩点 A、B 作大圓 q．点 A 和 B 把这大圓分成兩个弧（图60）：弧 $\overset{\frown}{AMB}$ 和弧 $\overset{\frown}{ANB}$．这兩个弧都是連接 A、B 兩点的短程

綫．設弧 $\overset{\frown}{AMB}$ 比弧 $\overset{\frown}{ANB}$ 短．显然这时候 $\overset{\frown}{AMB}$ 是球面上連接 A、B 兩点的最短弧，而弧 $\overset{\frown}{ANB}$ 虽然也是一条短程綫，毕竟不是球面上連接 A、B 兩点的最短弧．球面上沿着这兩个弧当中任一个弧綳紧的橡皮筋都处在平衡狀态．但細綫当沿弧 $\overset{\frown}{AMB}$ 綳紧的时候是处在**穩定**平衡的狀态，細綫沿弧 $\overset{\frown}{ANB}$ 綳紧的时候是处在**不穩定**平衡的狀态．假若我們把細綫从 $\overset{\frown}{ANB}$ 的位置拉到变成曲綫 $\overset{\frown}{AN_1B}$ 的形狀(图60)，$\overset{\frown}{AN_1B}$ 和 $\overset{\frown}{ANB}$ 相接近，但比較短些，那細綫就要离开 $\overset{\frown}{ANB}$ 的位置順着曲面上滑过．

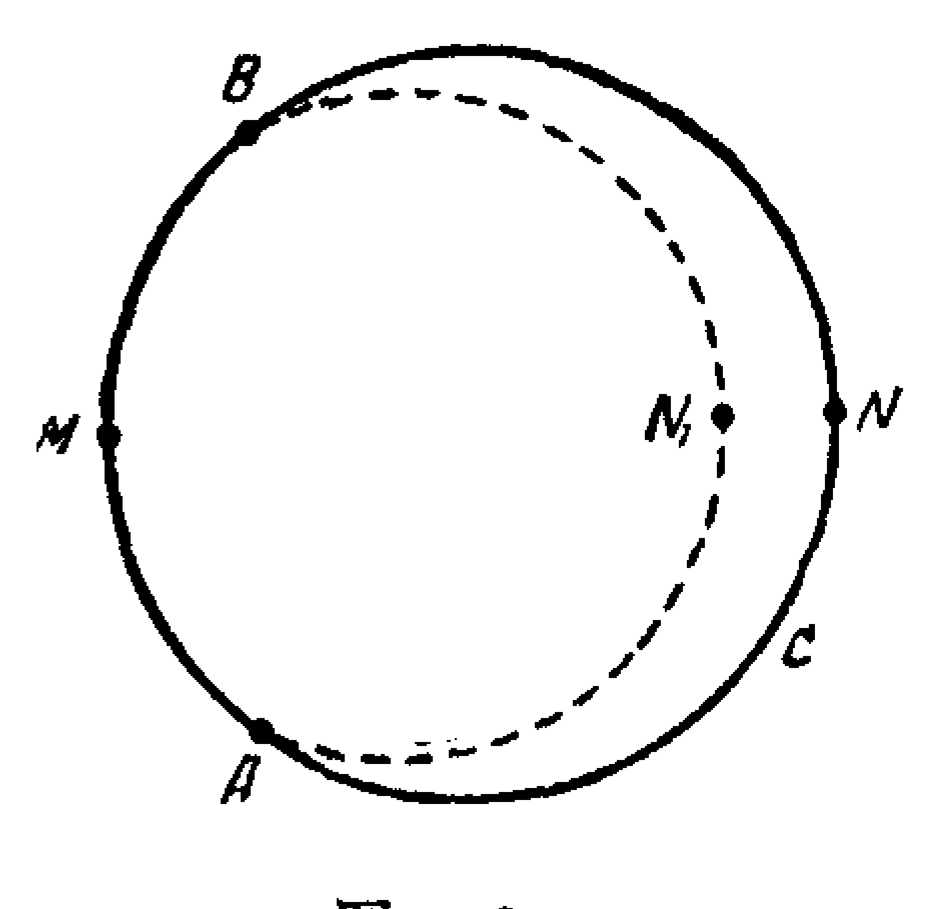


图 60.

这样，我們看到，**短程綫这一性質是使綫变成最短的必要条件，但不是充分条件．**

然而可以証明，短程綫上充分小的一段弧总是最短的．

短程綫可以这样下定义：它是这样的一条綫，在这条綫上充分小的弧段都是最短綫．

3．短程綫的“作图” 我們用刀口沿某一曲面 S 上輕輕划过；在每一瞬間，刀口和曲面在某一点 A 相切(图 61)．同时，我們这样来拿刀，使曲面在它和刀口接触点的法綫总通过刀面．这时候刀在曲面 S 上所划出的曲綫 q 就是一条短程綫．实际上，我們現在来看刀所划出的曲綫 q 上的小弧 $\overset{\frown}{BC}$ 和它上面的一点 A．我們大致可以認为弧 $\overset{\frown}{BC}$ 是在当刀口和曲面在点 A 相切的那一瞬間的刀面上．这样，在刀口和曲面在点 A 接触的那一瞬間的刀面，就是曲綫 q 在点 A 的密切平面．但我們从前面已經知道，假若



图 61.

曲綫 q 的密切平面总是过曲面的法綫，q 就是短程綫．因此，曲綫 q 是我們曲面的短程綫．

对于任意一曲面，我們还可以研究一个問題：要把曲面上剪下来的狹窄帶形展开在平面上，还有，反过来，要把平面帶形裹在曲面上．必須更确切地下定义，說明我們是怎样理解这些話的．

設在曲面上給定一曲綫 q．我們用一狹窄帶形把它圍起来(图 62)．一般說来，我們不一定能把这帶形展开在平面上使得这帶形上的曲綫在長度上沒有一些改变．但帶形越窄，这种改变相对地就越小①．

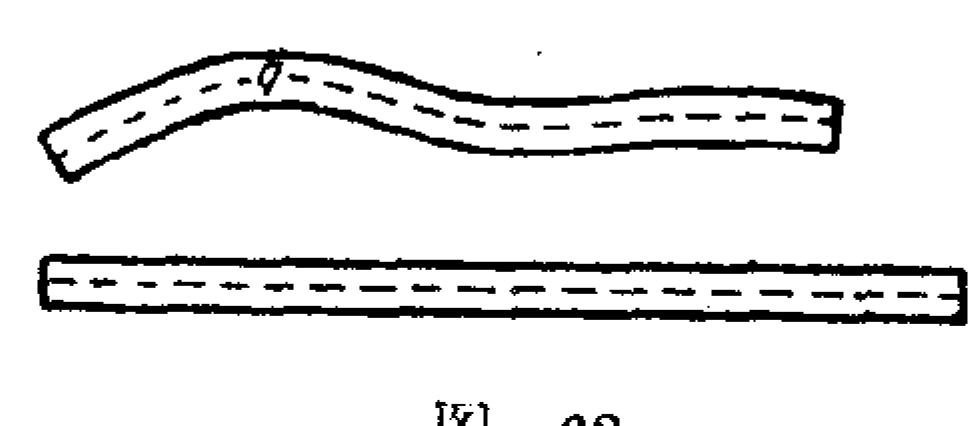


图 62.

假若我們把曲面上的狹窄帶形展开在平面上，帶形上連接兩定点的最短綫就变成了平面帶形上有类似性質的一条弧，也就是变成直綫段．反过来，裹在曲面上的平面帶形上的直綫段变成了曲面上的最短綫，就是变成短程綫．因此，包圍直綫段的狹窄帶形（寬比長小得非常多的帶子）是这样裹在曲面上，它使得直綫段变成短程綫弧．我們的窄帶子是沿着一条短程綫落在曲面上的．因此，裹在曲面上的狹長帶子可以構成曲面上的短程綫的一种观念．

九 关于短程綫的补充說明

1. 对称平面 現在我們来举一些短程綫的例子．我們先提醒讀者一个定义：若兩点 A 和 A' 是在平面 Q 的兩側，在 Q 的同一条垂綫上，并且它們到平面 Q 的距离相等，那末点 A 和点 A' 叫作关于平面 Q 对称(图 63)．

① 用极限論的話来說，那就是曲綫長度的改变在和帶形的寬度比較起来，是一个高阶无穷小量．

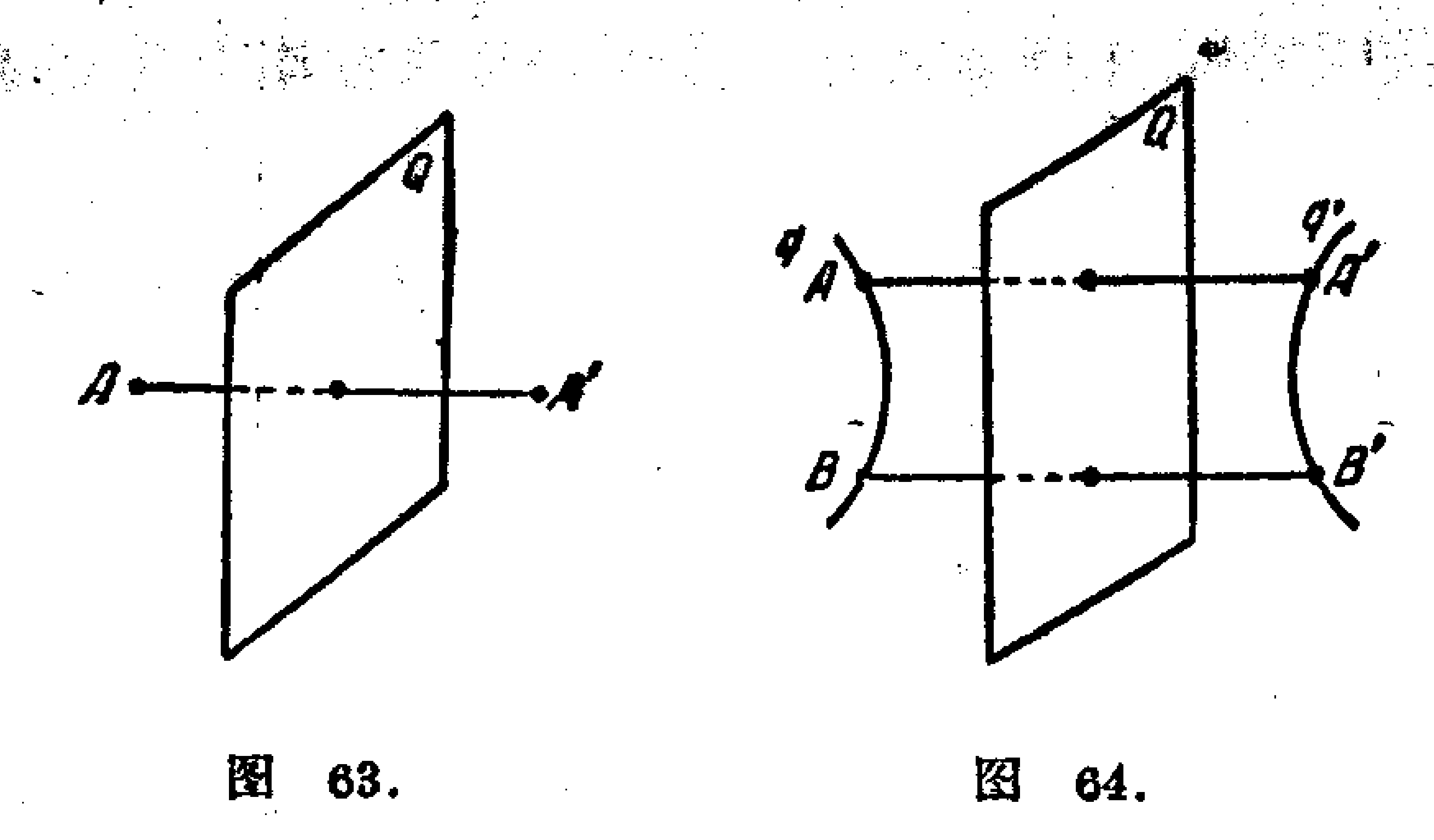


图 63.　　图 64.

若图形 q 的每一点 A 都对应了图形 q' 上和它关于平面 Q 对称的一点，反过来也是这样，那末图形 q 和图形 q' 叫作关于平面 Q 对称（图 64）。

若平面 Q 把曲面 S 分成兩部分，而这兩部分又是关于 Q 对称的，那末平面 Q 叫作曲面 S 的对称平面。

例 就球面来說，通过球心的任何一个平面都是球面的对称平面。

就圓錐面和圓柱面来說，通过它們的軸的任何一个平面都是对称平面。

对于有限的圓柱面来說，和軸垂直并把圓柱的高度平分的平面是对称平面。

对于无限的圓柱面（就是說，它的母綫是无限長的直綫）来說，任意一个和軸垂直的平面都是对称平面。

定理 設曲面 S 有对称平面 Q，Q 和 S 交于綫 q，那末綫 q 是曲面的短程綫①。

---

① 注意，我們只討論平滑的曲面。

按假設，綫 q 是在平面 Q 上的。如果在平面曲綫 q（見前一节的例 2）上的任一点，曲面 S 的法綫都是在平面 Q 上，那末曲綫 q 就是曲面 S 的短程綫。

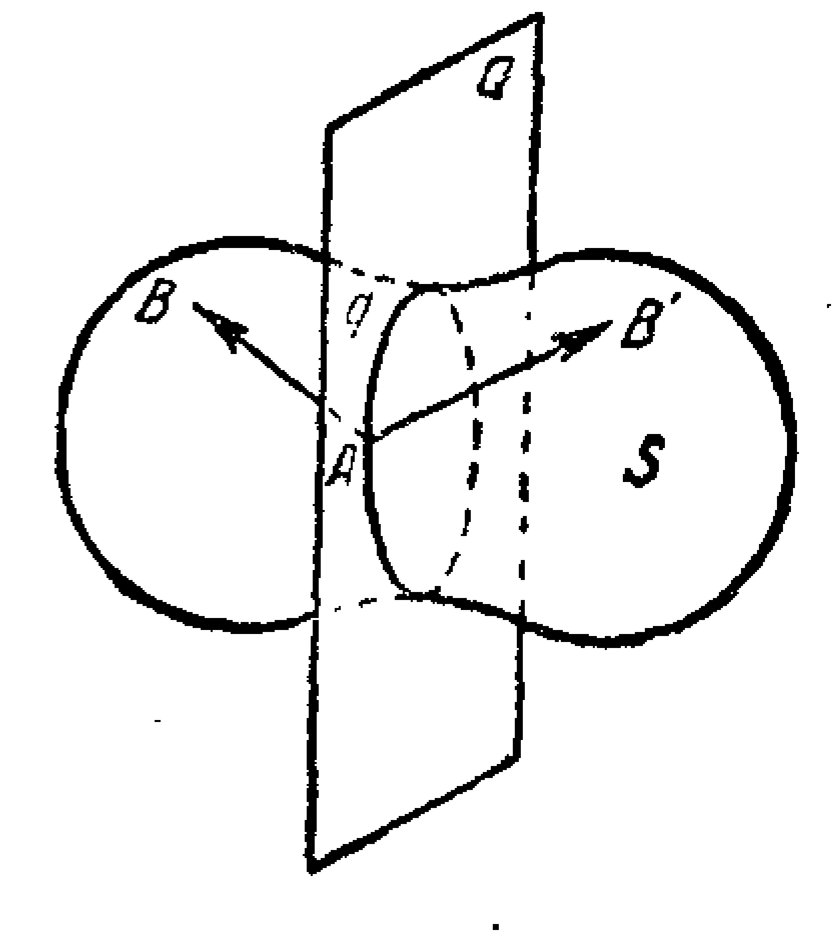


图 65.

設点 A 是曲綫 q 上的任意一点（图 65）。我們来証明曲面 S 在点 A 的法綫是在平面 Q 上。我們先反过来假設：曲面 S 在点 A 的法綫 AB 不在平面 Q 上。把 AB 关于 Q 对称的直綫記作 AB'。因为 AB 自己不在平面 Q 上，所以 AB 和 AB' 不重合。但平面 Q 是曲面 S 的对称平面，并且如果 AB 是 S 在点 A 的法綫，那末和它对称的直綫 AB' 也是 S 在点 A 的法綫。这样一来，曲面 S 在点 A 便有了兩条法綫，但这是不可能的。我們得到了矛盾；这就証明了 S 在任一点 A 的法綫都在平面 Q 上。我們的定理就完全証明了。

2. 閉短程綫 如果把橡皮圈在曲面 S 上綳紧，并使得这个橡皮圈处在平衡狀态，那它的形狀就会是某一条閉曲綫 q。这条曲綫 q 是短程綫，并且还是閉的。比如，当橡皮圈在球面上取大圓的形狀的时候，它会处在平衡狀态。球面上的大圓，以及回轉橢圓面上作为子午綫的橢圓都是閉短程綫（关于回轉曲面，見第 10 节）。

如果閉曲面 S 有某些对称平面，那末（由上面所証明的定理）每一个对称平面和曲面相交于一条閉短程綫。

有三个不同長短的軸 AA'、BB'、CC' 的橢圓面（图 66）

有三个对称平面，每一个平面通过橢圓面的兩条軸。这三个平面和橢圓面相交所得的三个橢圓 E_1、E_2、E_3 是閉短程綫。

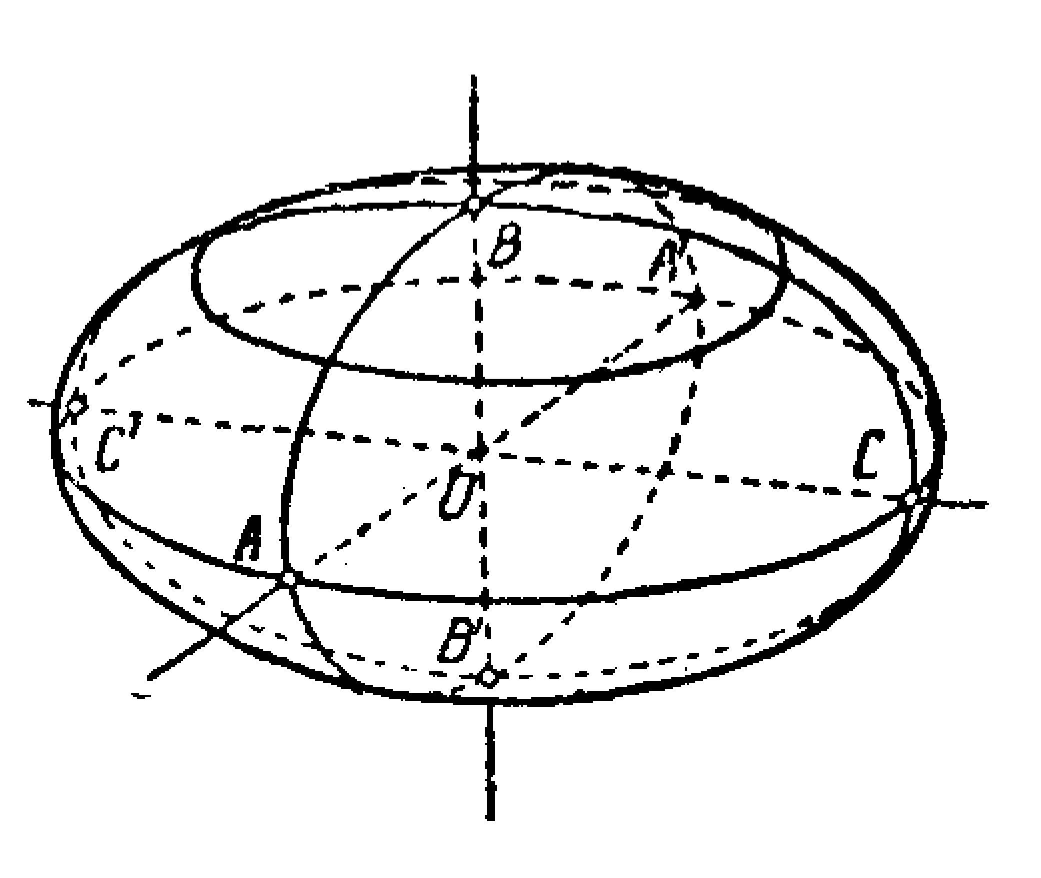


图 66.

可以証明，在一切閉曲面上，至少有三条閉短程綫。

3. 赫茲原理 在平面上依慣性而运动的点，是沿直綫运动的(牛頓第一定律)。

而在曲面上运动的点，如果沒有受到外力作用，必定沿着短程綫运动。

这就是赫茲原理。例如，在球面上运动的点，如果沒有受到外力作用，必定沿大圓运动，在圓柱面上却沿着螺旋綫运动。

实际上，沿曲綫 q 运动着的点，它的加速度可以分解成切綫的(朝着曲綫 q 的切綫方向的)和法綫的(朝着曲綫 q 的主法綫方向的)加速度。但如果点沿着曲面 S 上的曲綫 q 运动的时候沒有受到外力作用，那在这个点上作用的只是曲面的反作用力；而曲面的反作用力是朝着曲面的法綫方向的。既然作用力的方向和加速度的方向一致，那末在每一时刻，点的加速度方向一定和曲面的法綫方向相合。曲面在曲綫 q 某点的法綫和曲綫 q 在这一点的切綫垂直。既然加速度是朝着曲面法綫的方向，也就是說，和曲綫 q 的切綫垂直，那末切綫加速度一定等于零。因此，我們的点只有法綫加速度，它朝着 q 的主法綫的方向。加速度的方向同时是曲綫 q 的主法綫方向

和曲面 S 的法綫方向．这就表示說，在曲綫 q 上的每一点，这兩个方向相合，由此可知，曲綫 q 是曲面 S 上的短程綫．

4．**有棱曲面上的短程綫** 我們現在来看一个由兩个平滑曲面 S_1 和 S_2 沿着曲綫 s 拼成的曲面 S，曲綫 s 叫作曲面 S 的棱（二面角的面可以作为这种曲面的例子）．設在曲面 S 上取兩点 A 和 B，一点在 S_1 上，一点在 S_2 上（图 67），設 $q_0=ACB$ 是彈性細綫在曲面 S 上平衡时候的位置．这里，点 C 是在棱 s 上的，而曲綫 q_0 的弧 $\overset{\frown}{AC}$ 和 $\overset{\frown}{CB}$ 分别落在 S_1 和 S_2 上．显然 $\overset{\frown}{AC}$ 是 S_1 上的短程綫，$\overset{\frown}{CB}$ 是 S_2 上的短程綫．我們用第 8 节所用的方法来求出在轉折点 C 平衡的条件． 曲綫 q_0 是系牢在点 A 和 B 的柔韌細綫在曲面 S 上平衡时候的位置．

用 α 表示弧 $\overset{\frown}{AC}$ 和棱 s 的 CC' 那一段所夾的角，用 β 表示棱的 CC'' 段和弧 $\overset{\frown}{CB}$ 的夾角（就是指它們切綫的夾角）．作用在 C 点上的有这样一些張力：朝着弧 $\overset{\frown}{CA}$ 的切綫方向的 P_1，和朝着弧 $\overset{\frown}{CB}$ 的切綫方向的 P_2． 这兩个力大小相等，都等于 T．这兩个力在棱 s 在点 C 的切綫 LL_1 上的射影分别等于

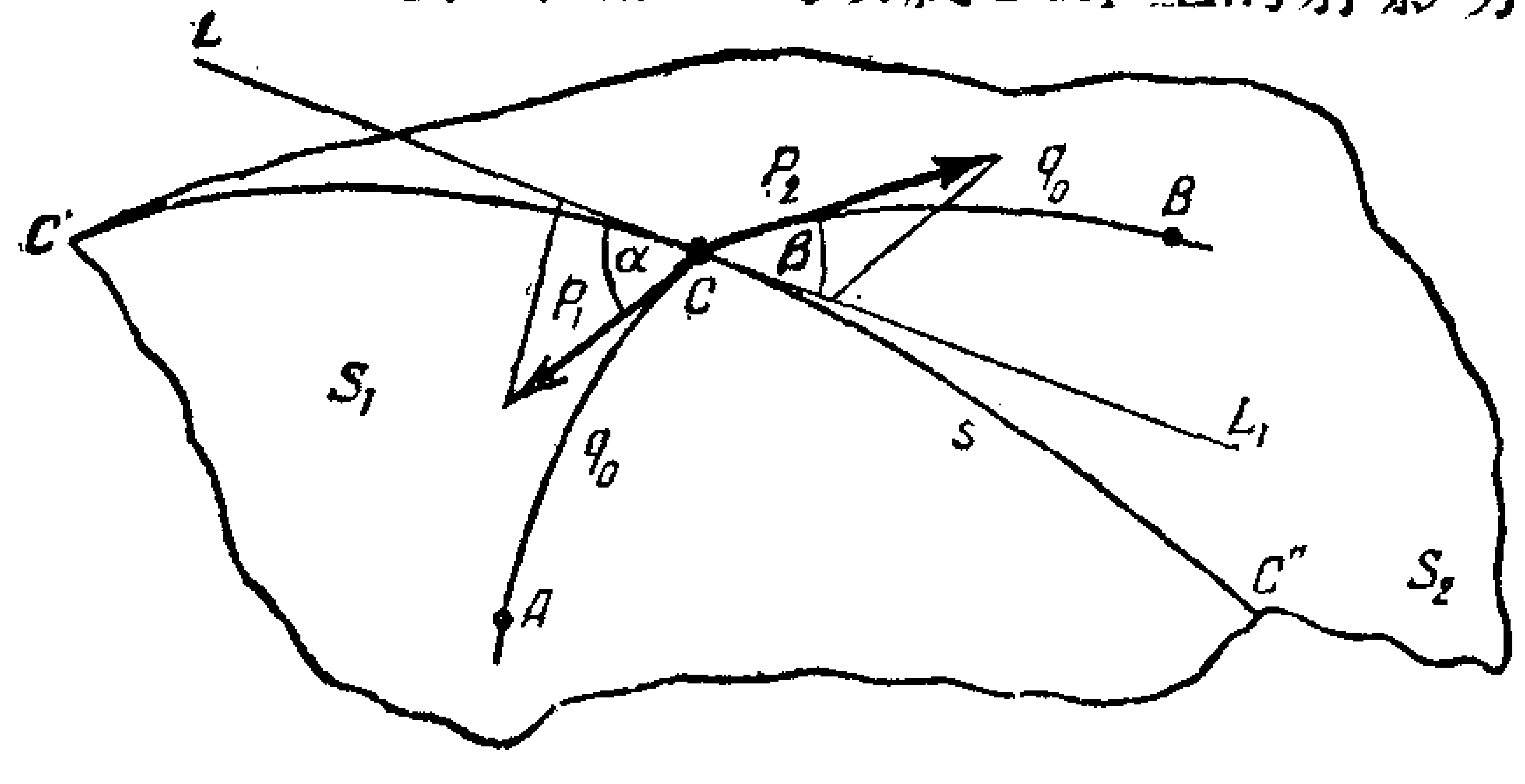


图 67.

$T\cos\alpha$ 和 $T\cos\beta$,而方向相反. 平衡的条件

$$T\cos\alpha = T\cos\beta$$

使我們得到

$$\alpha = \beta. \tag{1}$$

这就是說,在轉折点,棱 s 和弧 $\overset{\frown}{AC}$ 的夾角等于棱 s 和弧 $\overset{\frown}{CB}$ 的夾角.

很自然地,我們把曲綫 q_0 叫作曲面 S 上的短程綫.

若曲面 S 是由几块平滑的部分組成,划分这些部分的是棱 s_1、s_2……s_n,那末在这样的曲面上,短程綫(彈性細綫平衡时候的綫)是由綳紧在棱 s_1、s_2……s_n 的一些短程綫弧所組成,而在每个衔接点滿足条件(1)。

在曲面 S 上的最短綫是短程綫。第 1 节里所講的关于在多面角的面上最短綫的性質是有棱曲面上短程綫(和最短綫)性質的特别情形。

上面所說的关于在这样的曲面上的短程綫的性質也可以从赫兹原理推出。

一〇 回轉曲面上的短程綫

1. 回轉曲面 我們把平面曲綫 q 繞着和 q 在同一平面上的直綫 AB 回轉(图 68)。繞着 AB 回轉 q 的时候,产生了一个曲面 S,叫作回轉曲面. 任何一个通过回轉軸 AB 的平面 Q,和 S 相交于一对曲綫 q 和 q'. 这种曲綫叫作子午綫. 它們是由曲綫 q 繞着回轉軸回轉一个适当的角度而得到的. 每一个和回轉軸垂直的平面和曲面 S 相交于一个圓,叫作平行

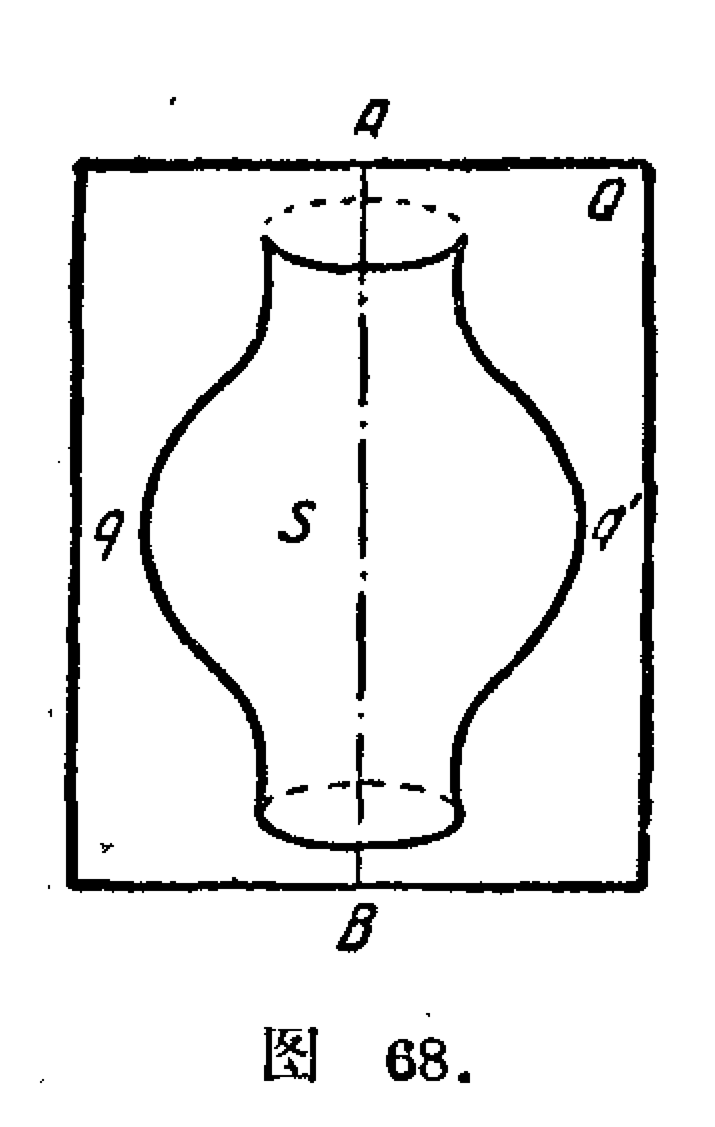


图 68.

圓.

定理 1. 回轉曲面上所有的子午綫都是短程綫.

我們来看通过軸 AB 的平面 Q 和回轉曲面相交所得的子午綫 q 和 q'. 平面 Q 是回轉曲面 S 的对称平面，因此，它和曲面 S 相交于短程綫. 于是，q 和 q' 是短程綫.

例 把橢圓 E 繞着它的軸回轉（图 69). 我們得到所謂回轉橢圓面. 它的子午綫是和 E 相等的橢圓. 这些橢圓是短程綫.

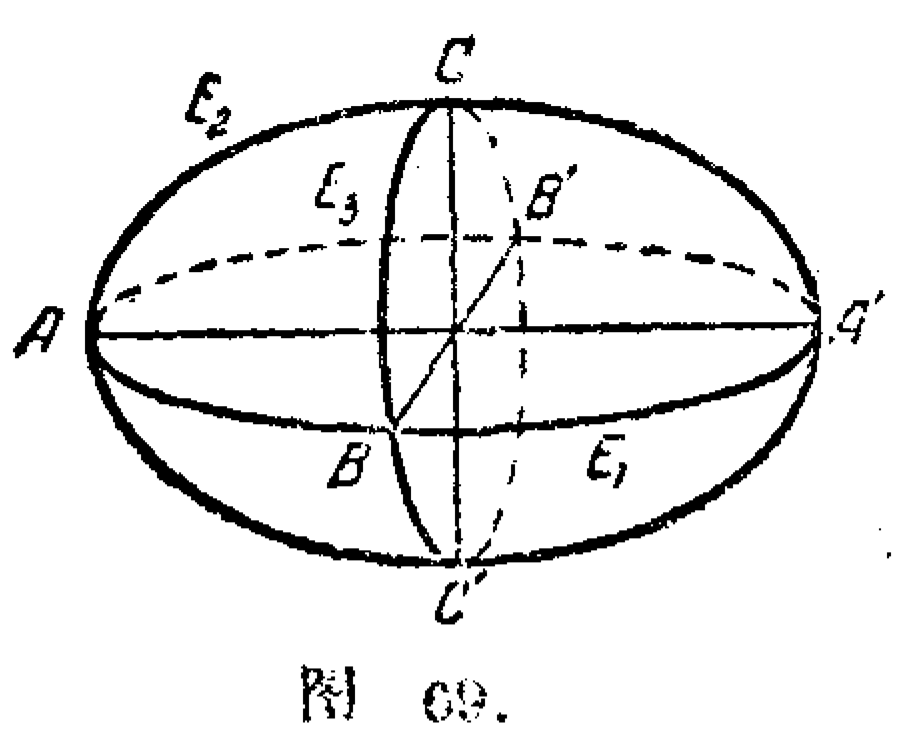


图 69.

附注 在圓柱面上，所有的平行圓都是短程綫；在球面上的平行圓当中只有赤道是短程綫；在圓錐面上，沒有一个平行圓是短程綫.

2. 克萊拉定理 考虑在回轉曲面 S 上的短程綫 q. 設 A 是短程綫 q 上的任意一点，r 是这一点到回轉軸的距离（平行圓半徑），α 是短程綫 q 和过点 A 的子午綫之間的交角.

定理 2（克萊拉） 在短程綫 q 上的每一点，$r\sin\alpha$ 的值是常数：

$$r\sin\alpha = c = \text{常数}. \tag{1}$$

若用 β 表示短程綫和平行圓之間的交角，那末公式（1）可以写成

$$r\cos\beta = \text{常数}.$$

克萊拉定理对于圓錐面和圓柱面的特殊情形，我們已經証明过了(見第3节第4段)。

我們来看折綫 $A_0A_1\cdots\cdots A_n$ 繞着軸 L 回轉所产生的曲面 S_n。曲面 S_n 由 n 个面 s_1、$s_2\cdots\cdots s_n$ 組成，它們分别是由回轉各边 A_0A_1、$A_1A_2\cdots\cdots A_{n-1}A_n$ 而产生的。这些曲面被一些由平行圓 t_1、$t_2\cdots\cdots t_{n-1}$ 所組成的“棱”所分开，这些平行圓是由折綫的頂点 A_1、$A_2\cdots\cdots A_{n-1}$ 回轉所产生的圓。

再来看曲面 S_n 上的兩点 A 和 B，并把它們用短程綫 q_0 联結起来。由第9节第4段里所証明的，短程綫 q_0 是由在截头圓錐面或圓柱面 s_1、$s_2\cdots\cdots s_n$ 上的短程綫弧在棱 t_1、$t_2\cdots\cdots t_{n-1}$ 上銜接而組成的，而互相銜接的短程綫弧和“棱”的交角是兩兩相等的。当沿着 q_0 运动的时候，曲綫 q_0 和平行圓的交角 β 連續地变动而沒有間断(本来只有在平行圓变成一条“棱”的那个时刻，这个角度的变动可能发生不連續的間断。但根据我們前面所説的，这也不会发生)。因此，$r\cos\beta$ 的值也連續地变动，沒有間断。

檢查一下当我們沿着 q_0 移动的时候，$r\cos\beta$ 的值怎样变动。当我們在曲面 s_0、$s_1\cdots\cdots s_n$ 当中的一个上面运动的时候，式 $r\cos\beta$ 保持不变(由我們已經証明的克萊拉定理的特别情形知道)。当通过“棱” t_1、$t_2\cdots\cdots t_{n-1}$ 当中的一个的时候，$r\cos\beta$ 的值也不会有間断。这就表示它沿着整个曲綫 q_0 都取常数值。这样，对于短程綫 q_0 上的所有的点来説，都有关系式

$$r\cos\beta=\text{常数}.$$

任意的平面曲綫 m 可以看作内接多边形 m_n 当边数 n 无限增多而最長边的長度趋于零的时候的极限．把 m 繞着某一个軸回轉所得到的回轉曲面 S，是把 m_n 繞着同一个軸回轉所产生的曲面 S_n 的极限．对于曲面 S_n 上的最短綫来說，克莱拉定理成立．由此我們得到結論說，对于曲面 S 上的最短綫，克莱拉定理也成立．

第 二 講

第四章

和紧張細綫的位能有关的問題

—— 綫的不改变長度的运动

1. 柔韌細綫的位能 我們要認为柔韌細綫在它所有的点都有相等的張力，并且当細綫的長度改变的时候，这个張力保持不变．我們来求細綫的位能．

設 $q=\overset{\frown}{ABC}$ 是一条平滑曲綫，長度是 l，由長 l_0 的弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和長 $(l-l_0)$ 的弧 $\overset{\frown}{BC}$ 所組成（图 70）．設占有位置 $\overset{\frown}{AB}$ 的細綫蜿蜒着沿曲綫 q 伸長到占有位置 $\overset{\frown}{ABC}$，这时候点 A 固定不动，而点 B 描出了長度是 $(l-l_0)$ 的弧 $\overset{\frown}{BC}$．考虑張力所作的功．

在点 B 的張力所作的功等于 $T(l-l_0)$．

图 70.

在曲綫 q 的小段弧 $E'E''$ 上作用的張力所作的功等于零．实际上，这些力的合力朝着曲綫 q 的法綫方向，但是弧 $E'E''$ 是沿着曲綫 q 滑动的．

这样說来，在我們細綫的运动里，張力总共所作的功，就归結成作用在端点 B 的力所作的功，就是說，等于

$$T(l-l_0)=Tl-Tl_0.$$

設当細綫占有位置 $\overset{\frown}{AB}$ 的时候它的位能等于 V_0，而当它占有位置 $\overset{\frown}{ABC}$ 的时候，位能等于 V. 位能的增量 $V-V_0$ 等于所作的功，就是說

$$V-V_0=Tl-Tl_0,$$

或
$$V-Tl=V_0-Tl_0. \tag{1}$$

我們認为，当細綫的長度趋于 0 的时候，位能趋于 0；当 $l_0\to 0$ 的时候，因此有 $V_0\to 0$，这就是說，$(V_0-Tl_0)\to 0$. $l_0\to 0$ 的时候把等式(1)的右方过渡到极限，我們得到：

$$V-Tl=0,$$

由这里就得到
$$V=Tl. \tag{2}$$

柔韌細綫的位能等于它的長度乘張力.

推論 若細綫移动时張力所作的功等于 0，那細綫的長度沒有变动. 事实上，在这个条件之下，位能不变，因为位能是和長度成正比的.

注意，若直綫段 AB 移动的时候仍旧是直綫，那末張力总共所作的功就归結成在这个綫段端点的張力所作的功.

保持折綫 ACB 形狀的細綫，它的張力总共所作的功就归結成在折綫端点 A、B 以及頂点 C 的張力所作的功.

2. 平行曲綫 兩条有公法綫的曲綫叫作平行曲綫. 最簡單的平行曲綫就是平行直綫和同心圓.

定理 1 夾在平行曲綫 q 和 q' 之間的各公法綫綫段，有相等的長度.

設曲綫 q 和 q_1 的公法綫 AB 从位置 A_0B_0 移动到位置 A_1B_1，并且在每一时刻始終是它們的公法綫（图 71）.

在这个移动中，張力所作的功等于0. 事实上，在端点 A 的張力朝着曲綫法綫的方向，因此，当这个端点沿着曲綫 q 移动的时候，張力所作的功等于0. 同样，在沿着曲綫 q_1 移动的端点 B，張力所作的功也等于0. 因此，在我們的公法綫的移動中，張力所作的功等于0. 由上面所說的推論，这时候公法綫的長度 l 不变：

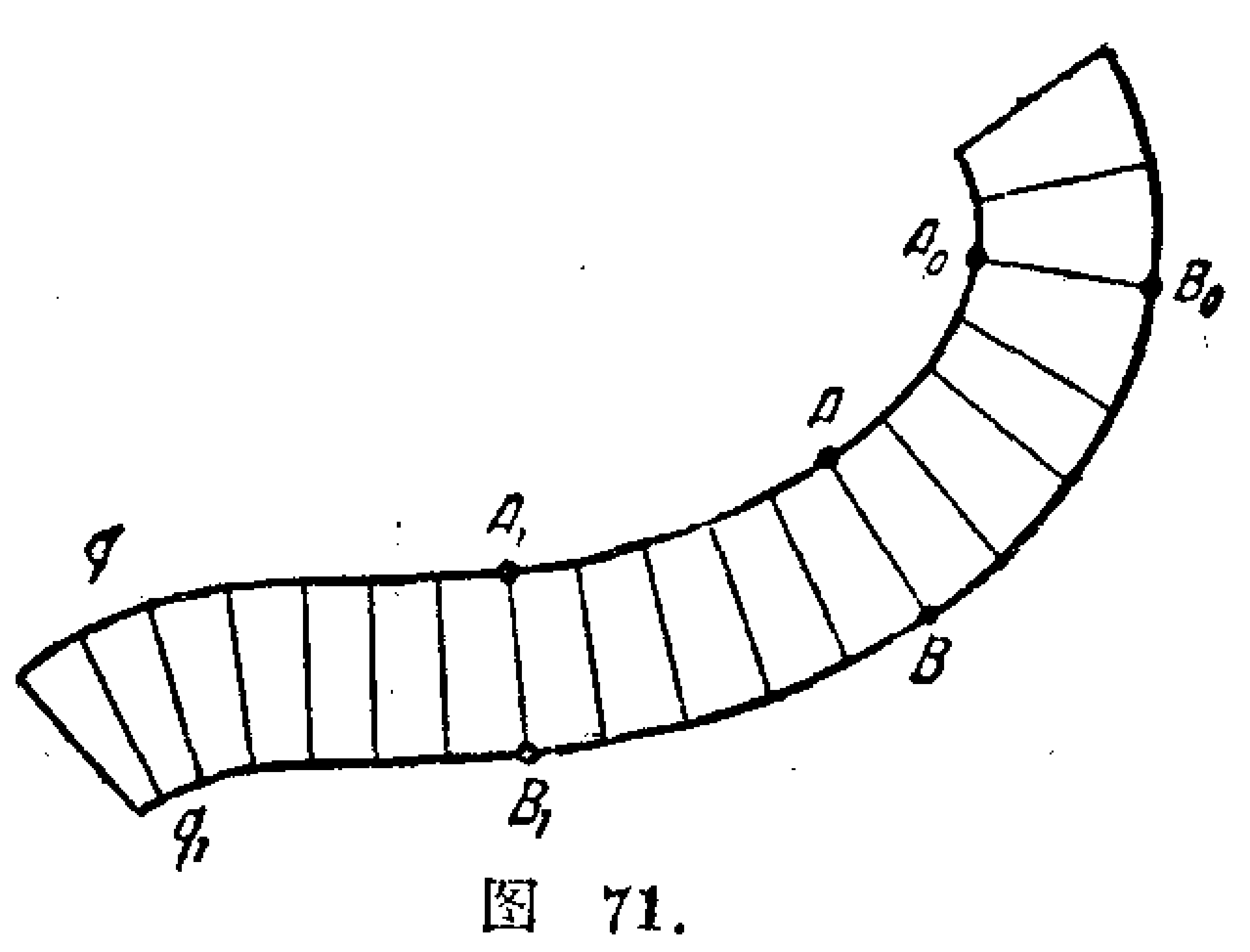


图 71.

$$l(A_0B_0)=l(A_1B_1).$$

3. **橢圓和拋物綫的法綫** 距兩个定点 F 和 F_1 的距离的和等于常数的点 B 的軌迹叫作橢圓：

$$FB+F_1B=2a \tag{3}$$

(a 是常数).

点 F 和 F_1 叫作橢圓的焦点，綫段 FB 和 F_1B 叫作矢徑.

定理 2 橢圓在它任意一点 B 的法綫必定是矢徑所夾角 FBF_1 的平分綫 BD（图 72）.

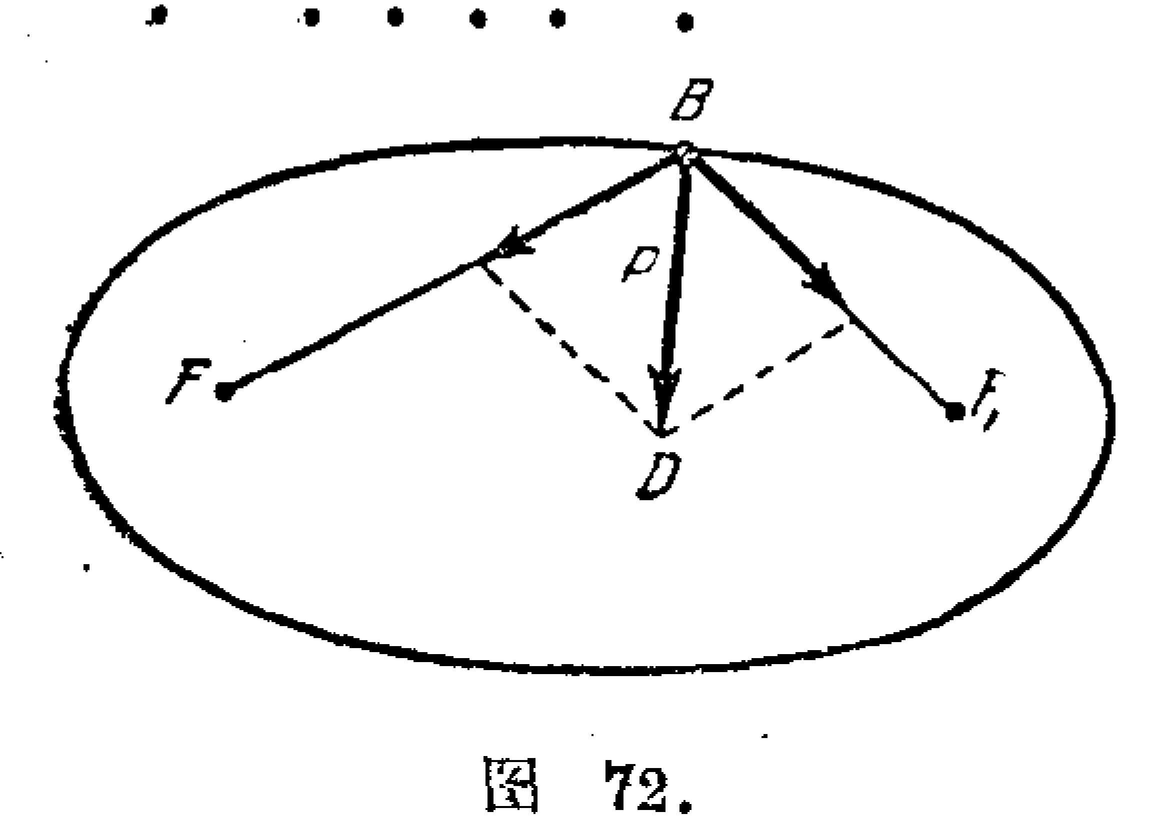


图 72.

事实上，設把形狀如折綫 FBF_1 的彈性細綫系牢在点 F 和 F_1；若使点 B 沿着橢圓运动来移动这条折綫，那末（由（3））它的長度不变. 因此，在任何时刻，張力

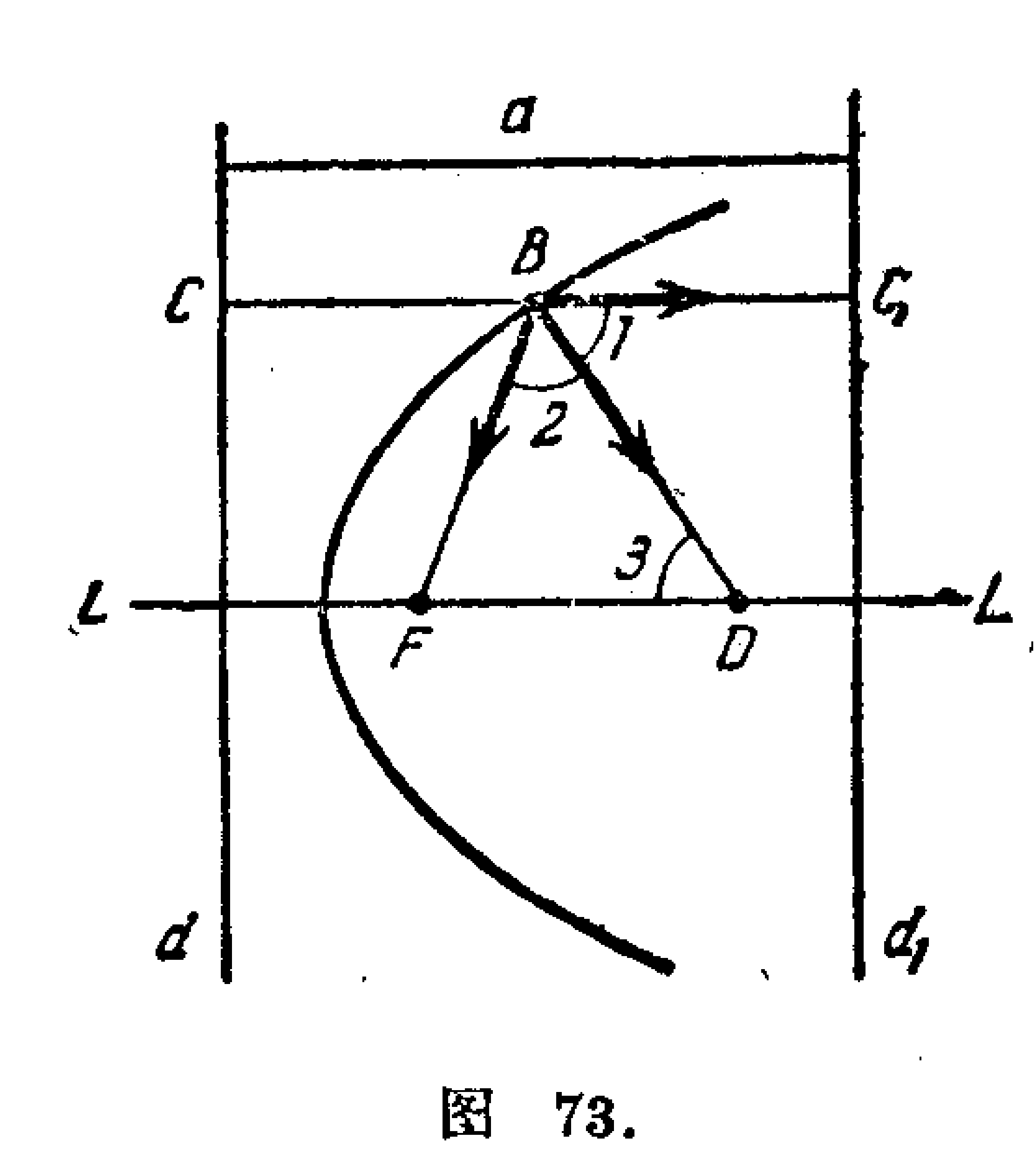


图 73.

所作的功等于0. 張力所作的功可以归結到在点B作用的力所作的功. 在这一点作用的是兩个相等的張力，方向分别是BF和BF_1. 它們的合力P是朝着角FBF_1的平分綫BD的方向的. 既然当点B沿着橢圓运动的时候P所作的功始終等于0，那末P在每一个时刻都一定朝着橢圓法綫的方向. 因此，橢圓在它的任意一点B的法綫和角FBF_1的平分綫重合.

距定点F和定直綫d等距离的点B的軌迹叫作抛物綫:

$$FB=BC \tag{4}$$

(BC是从点B所引直綫d的垂綫綫段(图73)). 点F叫作抛物綫的焦点，直綫d叫作它的准綫，通过焦点和d垂直的直綫LL叫作抛物綫的軸. 引直綫d_1和d平行，使得焦点F和准綫d都在d_1的同一側. 用a表示平行直綫d和d_1的距离. 通过抛物綫上的点B引直綫d和d_1的公垂綫CC_1(CC_1和軸LL平行). 我們有:

$$CC_1=CB+BC_1=a,$$

这里a是常数，等于平行直綫d和d_1之間的距离. 由(4)，

$$FB+BC_1=a. \tag{5}$$

現在不難証明下面的命題.

定理 3 抛物綫在它任意一点B的法綫必定平分矢徑

FB 和平行于軸 LL 的直綫 BC_1 之間所夾的角 FBC_1.

我們来看一条形狀如折綫 FBC_1 的細綫，它的一端系牢在点 F，另一端 C_1 在直綫 d_1 上滑动，使得 BC_1 保持和 d_1 垂直，而点 B 在拋物綫上滑动.

可以从式(5)看出，这条細綫的長度保持不变，因此，張力总共所作的功等于0. 这个功等于在点 C_1 和点 B 的張力所作功的和. 在点 C_1 的張力所作的功等于0，因为这个力的方向(沿着綫段 BC_1)和直綫 d_1 垂直，而点 C_1 沿着直綫 d_1 运动. 这就表示說，在点 B 的張力所作的功也等于0. 再重复一次关于橢圓的情形所作的論証，就完成了定理的証明[①].

注　由定理3可以推出拋物綫法綫的作法. 在軸 LL 上截取長度等于拋物綫矢徑 FB 的綫段 FD. 直綫 BD 是拋物綫的法綫.

事实上，在图73里，$\angle 1$ 和 $\angle 3$ 是平行綫 LL 和 CC_1 被割綫 BD 所截而得的內錯角，因而相等；因为三角形 FBD 是等腰的，所以 $\angle 3$ 和 $\angle 2$ 相等. 从这里我們得到：$\angle 2=\angle 1$，也就是說，BD 是角 FBC_1 的平分綫；因此，由定理3，BD 是拋物綫在点 B 的法綫.

4. 短程切綫和短程法綫　若短程綫弧 $\overset{\frown}{AB}$ 在曲面上移动，那只有作用在弧兩端点 A 和 B 的張力作了功. 实际上，作用在弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上任何一小部分的張力的合力是朝着曲面的法

① 实际上我們只对于在直綫 d_1 左側的拋物綫上的点証明了这个定理. 但是因为这条直綫(d 的平行綫)的位置是任意的，所以定理对于拋物綫上的所有的点都成立.

綫方向的，因此，弧在曲面上运动的时候，它所作的功等于0。

若曲面上的曲綫 q 在它上面的点 B 和短程綫 r 有公切綫，那短程綫 r 叫作曲綫 q 在点 B 的短程切綫；若曲綫 q 在点 B 和短程綫 s 正交，那 s 叫作曲綫 q 在点 B 的短程法綫(图74)。

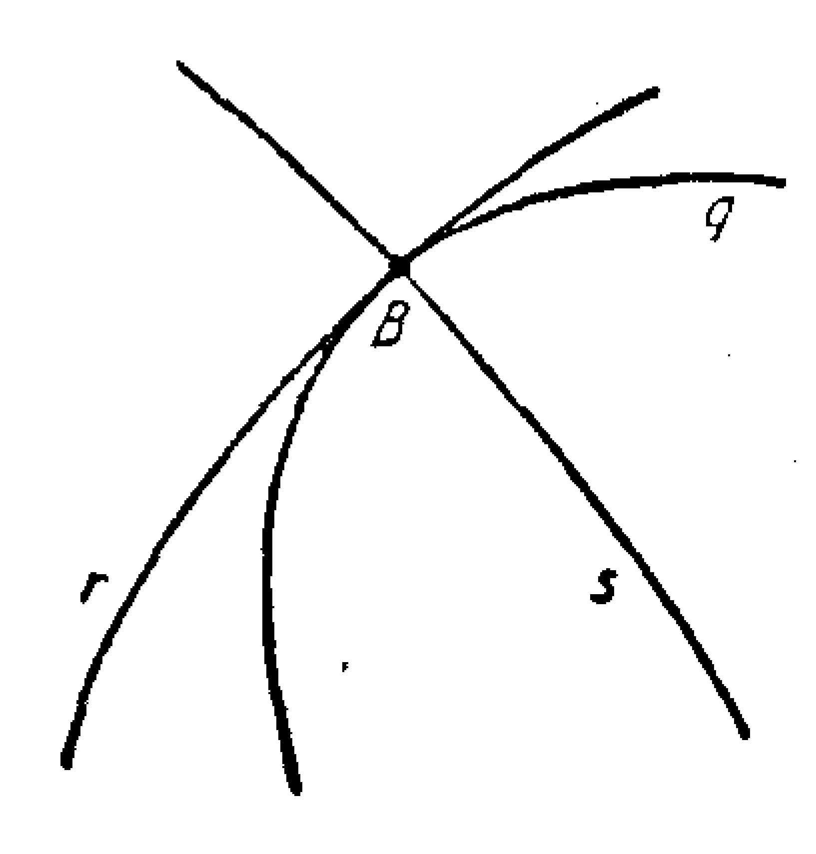


图 74.

关于公法綫的定理1可以推广到短程法綫。

定理 4 設二曲綫 q 和 q_1 在曲面上处处都共有短程法綫。那各条公共短程法綫夾在 q 和 q_1 之間的一段有相同的長度(图75)。

例 球面上，夾在兩个平行圓之間的子午綫綫段有相同的長度。

重复定理1的証明就可以証明定理4。

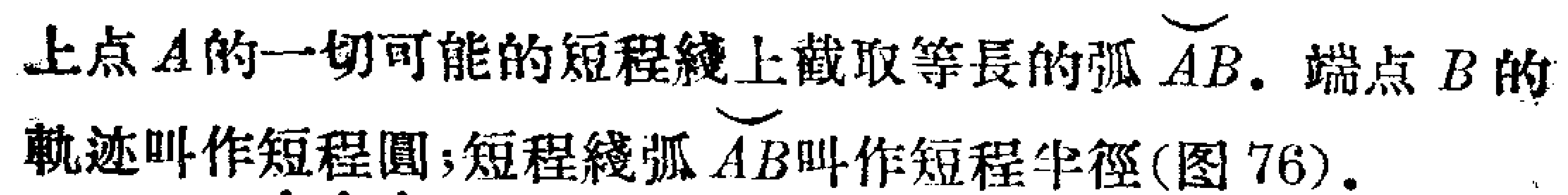


图 75.

5. 短程圓 在通过曲面上点 A 的一切可能的短程綫上截取等長的弧 $\overset{\frown}{AB}$。端点 B 的軌迹叫作短程圓；短程綫弧 $\overset{\frown}{AB}$ 叫作短程半徑(图76)。

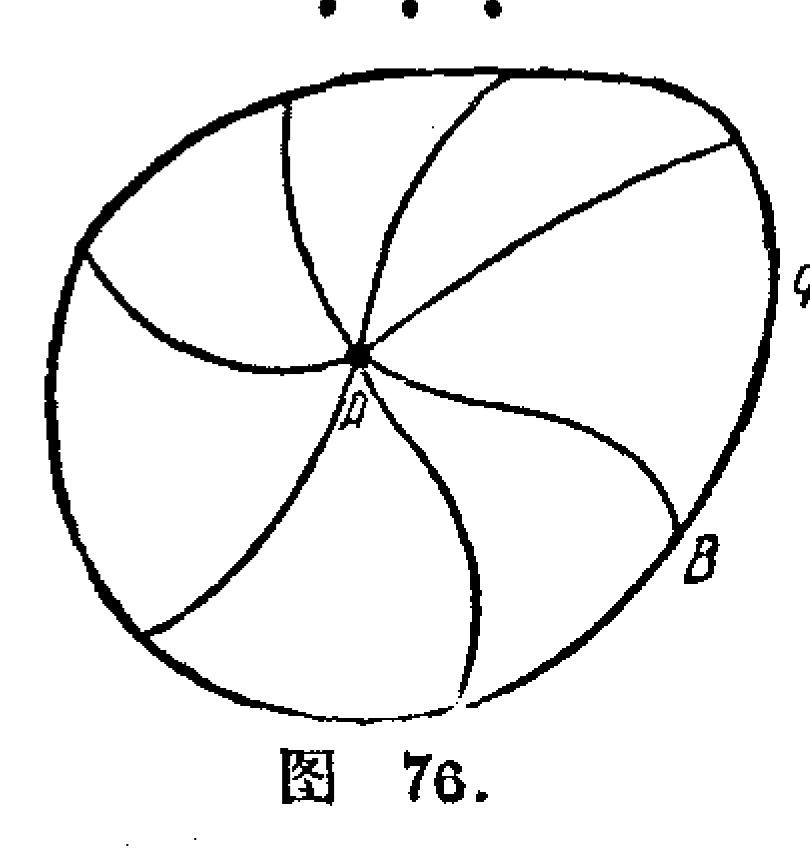


图 76.

每一条短程半徑 $\overset{\frown}{AB}$ 都是短程圓在点 B 的短程法綫。

設弹性細綫 $\overset{\frown}{AB}$ 的端点 A 固定，并且有短程半徑的形状，移动 $\overset{\frown}{AB}$ 使得端点 B 描出短程圓 q。既然短程綫弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的長度不变，張力

所作的功就等于0. 这个功归結成在端点 B 的張力所作的功. 因此,在点 B 的張力所作的功总是等于0. 張力一定朝着曲綫 q 的法綫方向. 而在点 B 的張力的方向又是和短程半徑 $\overset{\frown}{AB}$ 相切的,这样我們的定理就証明了.

一二 漸屈綫和漸伸綫

我們現在来看一条平面曲綫 q,考虑从这条曲綫的各个点所引法綫所形成的直綫族,以及这些法綫的包絡 s(就是說,和这些法綫相切的曲綫 s). 包絡 s 叫作曲綫 q 的漸屈綫,而和漸屈綫 s 所有的切綫正交的曲綫 q,叫作曲綫 s 的漸伸綫(图77).

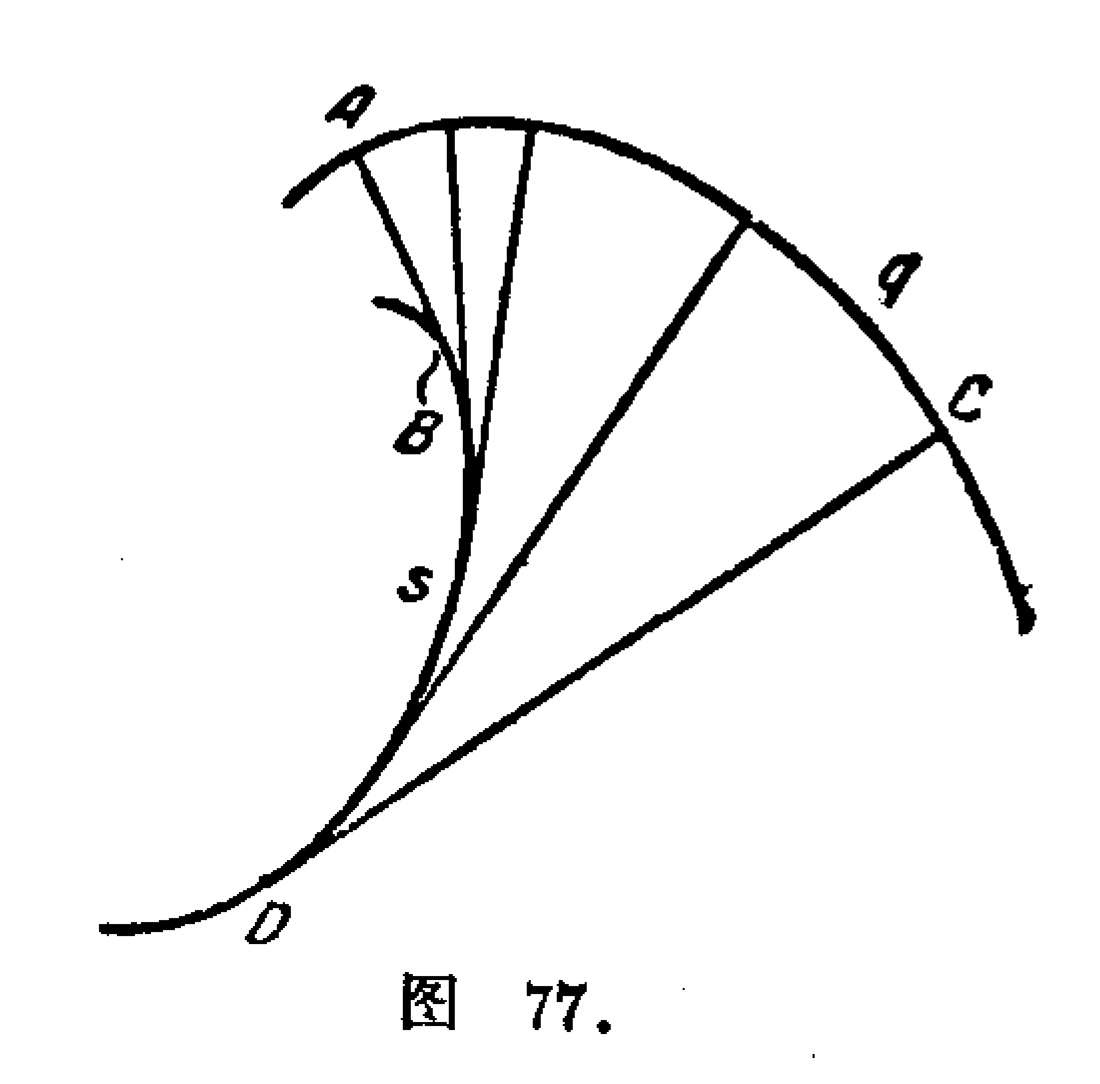


图 77.

漸屈綫的每一点 B 是漸伸綫的法綫 AB 和无限鄰近的法綫 $A'B'$ 的交点,也就是說,点 B 是曲綫 q 在点 A 的曲率中心(見第6节). 曲綫 q 的漸屈綫 s 可以这样下定义,它是这条曲綫的曲率中心的軌迹.

設彈性細綫的形狀如曲綫 r,由漸伸綫的法綫綫段 AB 和漸屈綫 s 的弧 $\overset{\frown}{BD}$ 所組成(見图77). 若沿着这条曲綫从 A 运动到 D,在点 B 从直綫段 AB 到弧 BD 的过渡是平滑的. 因此,彈性細綫取 $r=\overset{\frown}{ABD}$ 的位置的时候,是处在平衡狀态的. 我們来移动細綫 r,使得端点 A 沿着漸伸綫运动,而点 B 沿着

漸屈綫运动；这时候 AB 总处在漸伸綫的法綫的位置，而細綫剩下的部分 BD 紧貼着曲綫 s。作用在法綫 AB 上各点的張力；总共所作的功等于它們在点 A 和 B 所作的功。但是，因为在点 A 的張力朝着曲綫 q 的法綫方向，而点 A 在曲綫 q 上滑动，所以張力在点 A 所作的功等于 0。作用在点 B 的張力是抵消了的，在任何一个时刻它所作的功等于 0。最后，在所考虑的时刻，在細綫 r 的还沒有运动的部分 $\overset{\smile}{BD}$ 上張力所作的功也等于 0。因此，在每一个时刻，張力所作的功都等于 0。在我們的运动过程中，細綫 r 的位能保持不变，可知細綫 r 的長度也保持不变。

若 $\overset{\smile}{ABD}$ 是細綫 r 起初的位置，而綫段 CD 是它最后的位置，那末 $\overset{\smile}{ABD}$ 的長度等于 CD 的長度：

$$l(\overset{\smile}{ABD})=l(CD).$$

但 $$l(\overset{\smile}{ABD})=l(AB)+l(\overset{\smile}{BD}),$$

或 $$l(CD)=l(AB)+l(\overset{\smile}{BD}),$$

由这里可知 $$l(\overset{\smile}{BD})=l(CD)-l(AB).$$

这样我們就証明了下面的定理。

定理 若从漸伸綫上的兩点 A 和 C 引法綫 AB 和 CD 到它們和漸屈綫相切的点 B 和 D，那末这兩条法綫綫段長度的差等于它們中間所夾的一段漸屈綫弧 $\overset{\smile}{BD}$ 的長度。

若对于曲面上的曲綫 q 作它的所有短程法綫所形成的曲綫族（图 78），那末这一族短程法綫的包絡 s 叫作曲綫 q 的短程漸屈綫，而曲綫 q 叫作曲綫 s 的短程漸伸綫。如果在上面的定理里把“法綫”、“漸屈綫”、“漸伸綫”等字样了解作短程法

綫、短程漸屈綫和短程漸伸綫，那末这个定理依旧成立。讀者不难看出，在这种情形之下，可以和以前一样地去証明。

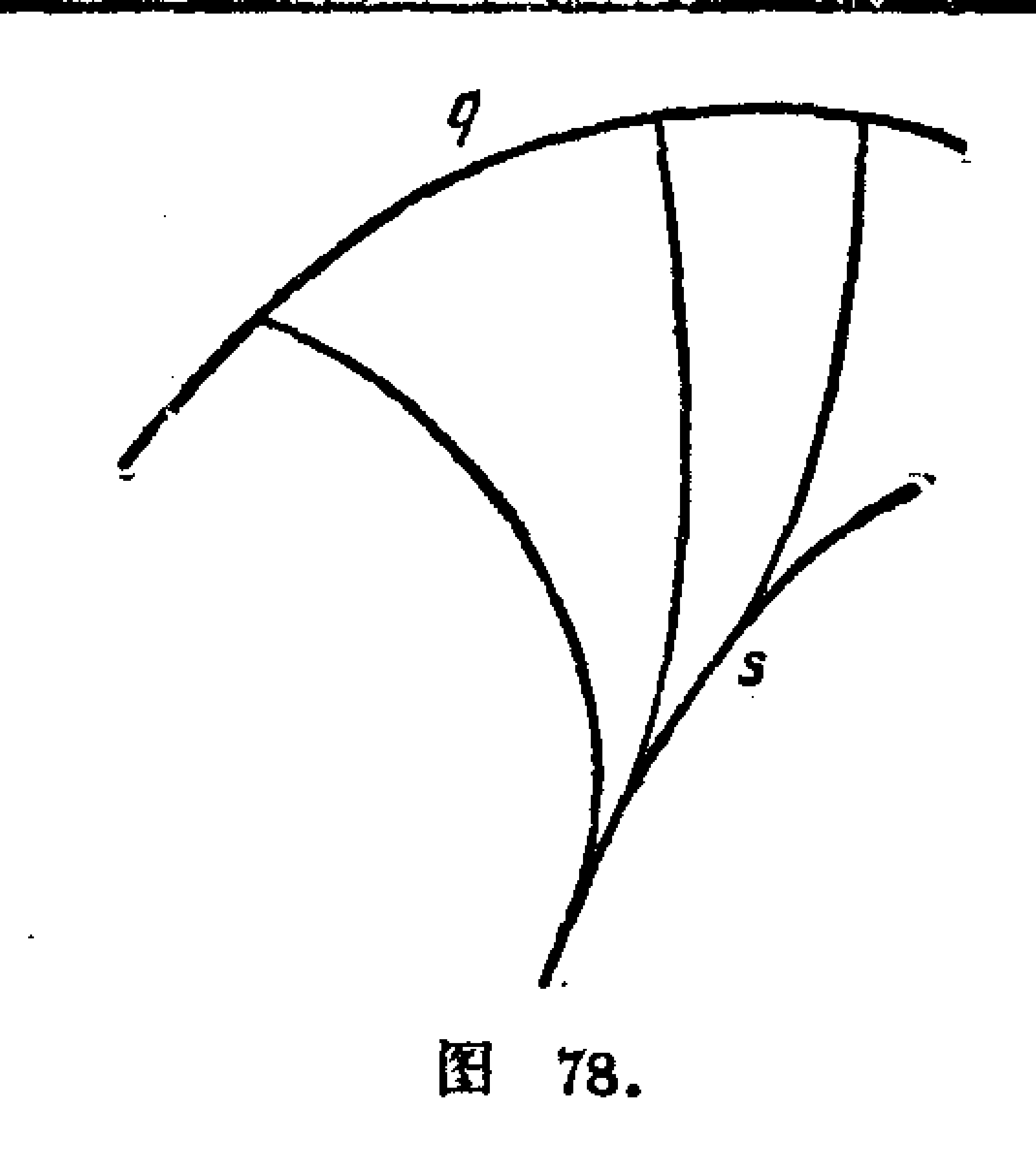


图 78.

一三 彈性細綫系統的平衡問題

1. 狄利赫萊原理 就力学系統来說，位能极小的位置是平衡位置。事实上，假如一个静止的力学系統从它的位能极小的位置 S 移动到别的位置，那它的位能只可能增加；由能量守恆原理，可知它的动能只可能减少。因此，如果在位置 S，系統是处在靜止狀态，也就是說，动能的值等于 0，那末把这个系統移动的时候，不可能得到正値的动能，也就是說，不可能开始运动。

例 彈性細綫的位能和它的長度成正比。因此，当它的長度最小的时候，是处在平衡的狀态。我們曾經不止一次地利用了这个事实。

以下我們列举兩个問題，关于寻求由几条細綫所組成的系統的平衡位置（下面第二个問題对以后是重要的）。

2. 关于長度的和極小的問題 在平面上給定了 n 个点 B_1、B_2……B_n。求一点 A，使得从它到給定各点的距离的和最

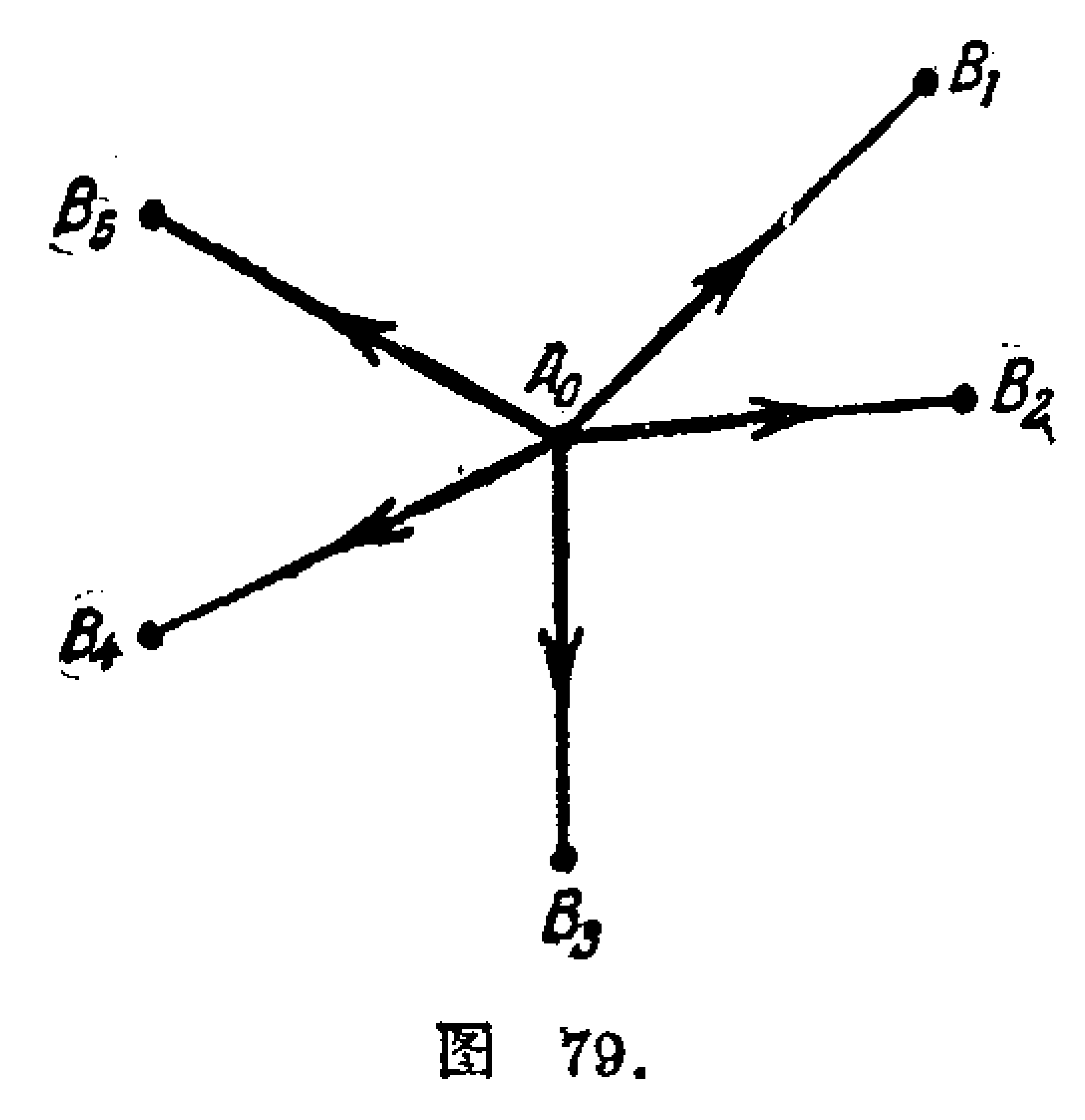


图 79.

小．考虑 n 条彈性細綫 AB_1、AB_2……AB_n，它們有一个端点 A 是公共的(例如，把細綫在点 A 互相联結起来)，把另外一端系在点 B_1、B_2……B_n．这个細綫系統的位能和各細綫 AB_1、AB_2……AB_n 的長度的和成正比．細綫長度的和极小，也就是位能极小，这时候系統应該处在平衡位置．处在这样位置的时候，每一条細綫都变成直綫段，而这些綫段長度的和又是最小．設 A_0 是系統处在这样的平衡狀态的时候点 A 所占的位置(图 79)．作用在 A_0 的有 n 个相等的張力，作用的方向沿着 A_0B_1、A_0B_2……A_0B_n．这 n 个力互相抵消．因此，在距点 B_1、B_2……B_n 的距离的和是最小的点 A_0，沿着方向 A_0B_1、A_0B_2……A_0B_n 作用的 n 个相等的張力的合力等于 0①．

可以用机械方法来实际找出这样的点 A_0：在水平薄板上的点 B_1、B_2……B_n 鑽 n 个小孔(图 80)；把 n 条繩子的一端互相联結成一点放在薄板上，另一端各穿过一个小孔伸到薄板

① 魏果德斯基指出，这个命題应該說得更确切些才对．若使得長度 AB_1、AB_2……AB_n 的和最小的点 A，和 B_1、B_2……B_n 当中的任何一点**不重合**，那末这个命題是貭确的．

例如，在三点 B_1、B_2、B_3 的情形，若三角形 $B_1B_2B_3$ 的三个角都不大于 120°，那末点 A 在三角形里面．但若三个角当中有一个，比如說在頂点 B_1 的角，大于或等于 120°，那点 A 就和这个頂点重合．

下，拌各系上重量相等的砝碼. 放手讓我們这个由繩子和砝碼組成的系統自动地停止在平衡狀态，这时候 n 条繩子的那个公共端点所占的位置就是所寻求的点 A_0. 事实上，在这一点作用的是 n 条繩子的相等的張力，力的作用方向朝着那些小孔 B_1、B_2……B_n（每一个張力都等于繩子下端所系砝碼的重量）. 这 n 个力互相抵消.

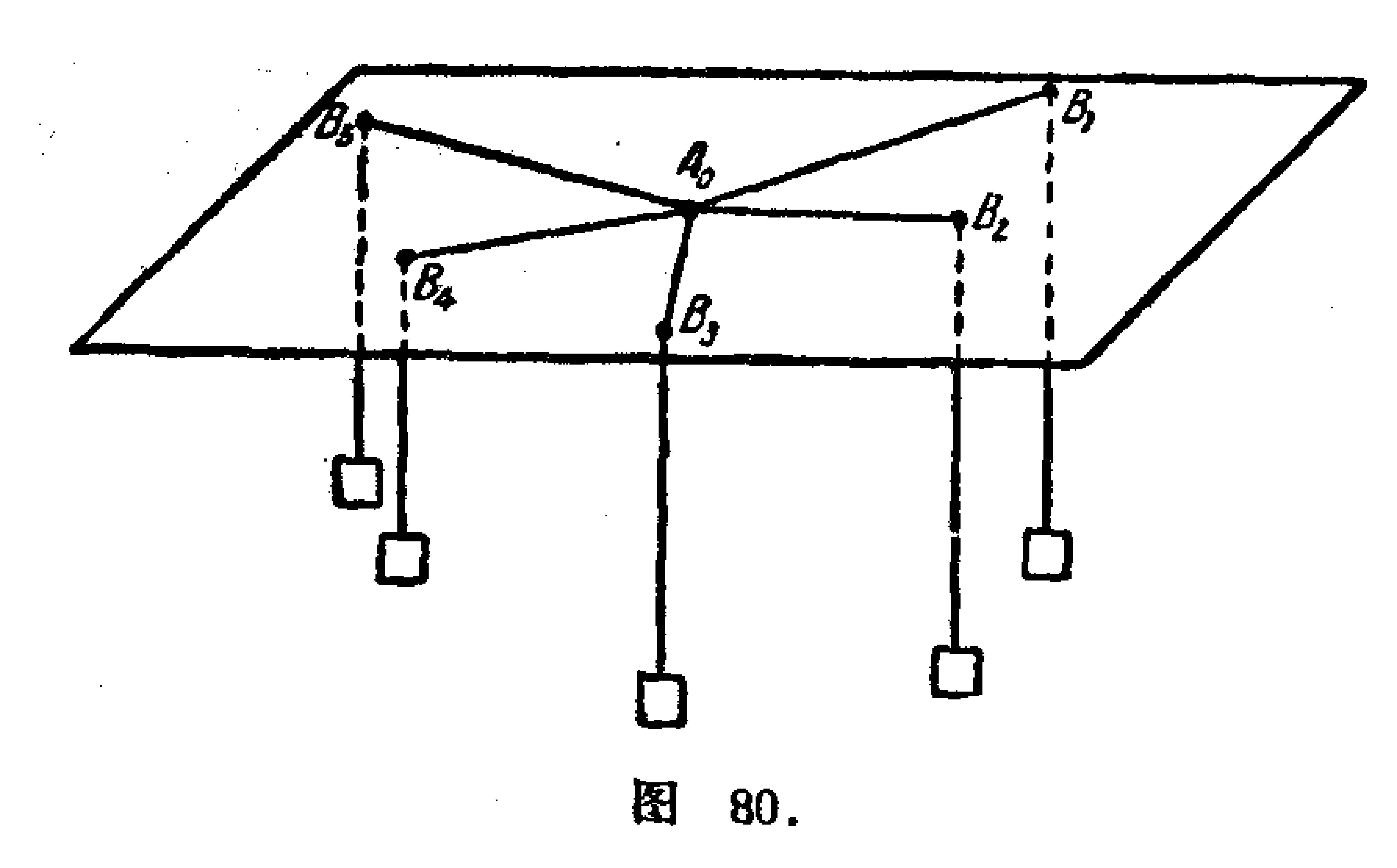


图 80.

下面的問題可以归結成我們上面所說的問題：設有 n 个地点 B_1、B_2、……B_n；要在某点 A 建造一个仓庫，并从仓庫筑直綫道路 AB_1、AB_2……AB_n. 寻求建造仓庫最有利的位置，使得道路 AB_1、AB_2……AB_n 的長度的和最小.

有时也可以把問題变得更复杂些：設由仓庫 A 到 B_1、B_2……B_n 各点的貨物流量分别和 q_1、q_2……q_n 成正比. 要选擇点 A 的位置，使得和式

$$S=q_1\overline{AB_1}+q_2\overline{AB_2}+\cdots\cdots+q_n\overline{AB_n}$$

最小（也就是說，沿着道路 AB_1、AB_2……AB_n 运輸貨物的吨-公里总数最小）.

这个問題可以和前面的問題同样来求解(前面所說的是当 $q_1=q_2=\cdots\cdots=q_n$ 的时候的特別情形)。n 条細綫 AB_1、$AB_2\cdots\cdots AB_n$ 有公共端点 A,另一端分别系牢在点 B_1、$B_2\cdots\cdots B_n$,現在要寻求这一个系統的平衡位置。但这里的細綫 AB_1、$AB_2\cdots\cdots AB_n$ 有不同的張力,分别和数 q_1、$q_2\cdots\cdots q_n$ 成正比,設分别是 q_1T、$q_2T\cdots\cdots q_nT$。細綫 AB_1、$AB_2\cdots\cdots AB_n$ 的位能分别等于 $q_1T\overline{AB_1}$、$q_2T\overline{AB_2}\cdots\cdots q_nT\overline{AB_n}$。这个系統的总位能等于

$$V=T(q_1\overline{AB_1}+q_2\overline{AB_2}+\cdots\cdots+q_n\overline{AB_n})=TS. \qquad (1)$$

V 最小时候的位置,也就是說和式 S 最小时候的位置,是这个系統的平衡位置。这时候,每一条綫 $AB_i\,(i=1、2\cdots\cdots n)$ 都成了直綫段。这些細綫的公共点 $A=A_0$ 就在 n 个張力的作用下处在平衡狀态,这 n 个張力的方向沿着綫段 A_0B_1、$A_0B_2\cdots\cdots A_0B_n$,大小和数 q_1、$q_2\cdots\cdots q_n$ 成正比。

上面所說求点 A_0 的机械方法仍旧有效;但是系在穿过 B_1、$B_2\cdots\cdots B_n$ 各小孔的繩子末端的重量应当和数 q_1、$q_2\cdots\cdots q_n$ 成正比。

3. 兩条細綫所組成的系統的一个平衡問題 我們来看一条形狀如曲綫 $q=\overset{\frown}{ACB}$ (图 81) 的柔韌而非均匀的細綫,它的兩个端点 A 和 B 固定,点 C 在曲綫 s 上滑动,而在細綫的 $\overset{\frown}{AC}$ 部分張力等于 T_1,在 $\overset{\frown}{CB}$ 部分張力等于 T_2。細綫的位能 $V(q)$ 等于

$$V(q)=V(\overset{\frown}{AC})+V(\overset{\frown}{CB}).$$

由

$$V(\overset{\frown}{AC})=T_1 l(\overset{\frown}{AC}),$$

$$V(\overset{\frown}{CB}) = T_2 l(\overset{\frown}{CB}),$$

我們有 $$V(q) = T_1 l(\overset{\frown}{AC}) + T_2 l(\overset{\frown}{CB}). \qquad (2)$$

設細綫 q 在位置 q_0 的时候有最小的位能。由狄利赫萊原理，細綫在位置 q_0 的时候是处在平衡状态。設 C_0 是 q_0 和 s 的交点。

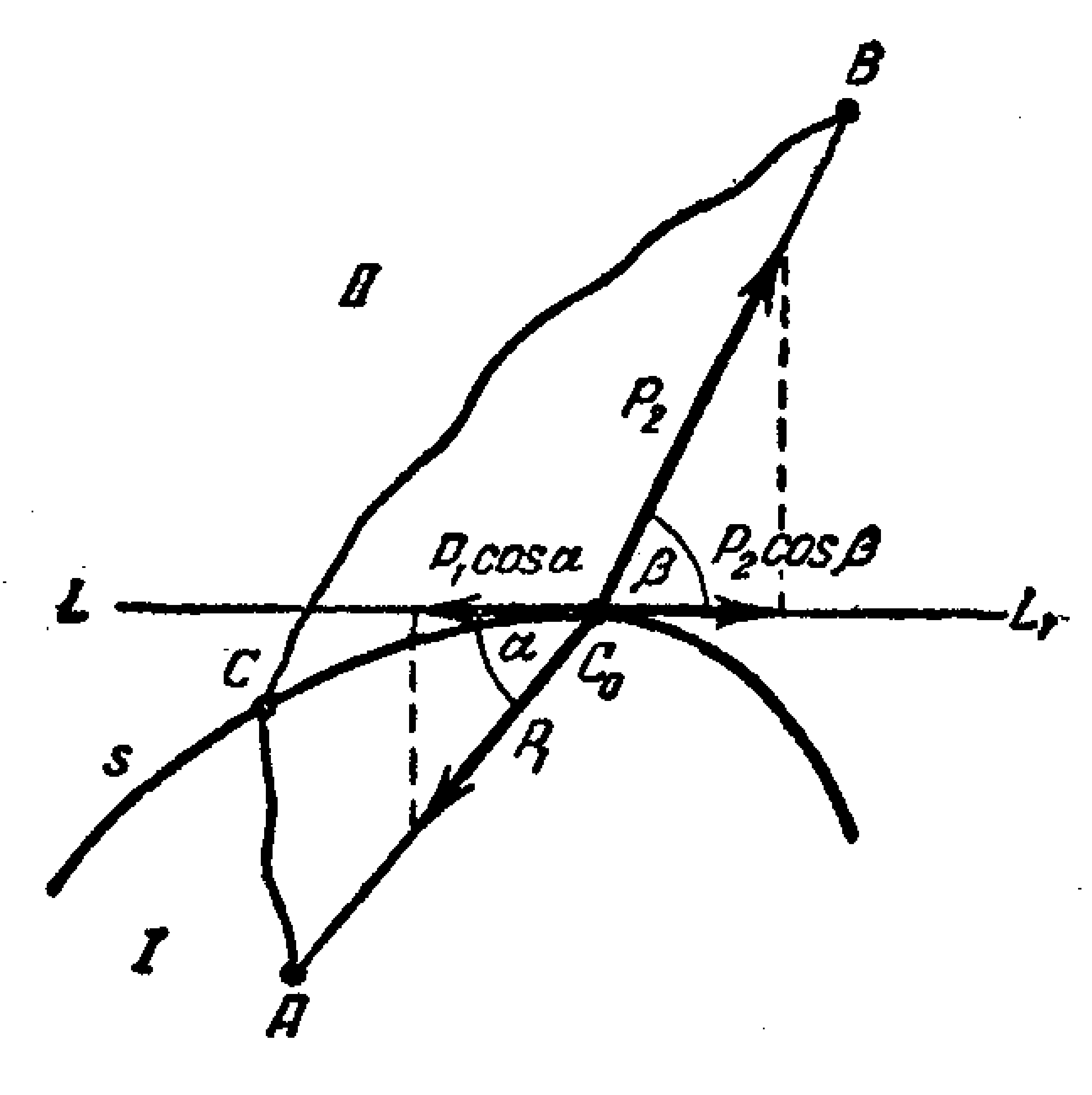


图 81.

不难推出，曲綫 q_0 上的部分 $\overset{\frown}{AC_0}$ 和 $\overset{\frown}{C_0B}$ 都是直綫段。現在来看在点 C_0 的平衡的条件。

作用在这一点的張力是：方向沿着 C_0A、大小等于 T_1 的力 P_1，和方向沿着 C_0B、大小等于 T_2 的力 P_2。引曲綫 s 在点 C_0 的切綫 LL_1。用下列的記号記角度：

$$\left.\begin{aligned} \angle AC_0L &= \alpha, \\ \angle L_1C_0B &= \beta. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

力 P_1 在切綫方向的分力等于 $P_1\cos\alpha = T_1\cos\alpha$，方向沿着 C_0L；力 P_2 在切綫方向的分力等于 $P_2\cos\beta = T_2\cos\beta$，方向沿着 C_0L_1。如果这兩个切綫分力能相互抵消，也就是說如果

$$T_1\cos\alpha = T_2\cos\beta, \qquad (4)$$

那末点 C_0 处在平衡位置。因此，曲綫 q_0 是一条折綫 AC_0B，頂点 C_0 在分界綫 s 上，并在那里滿足条件(4)。

第五章

等周問題

一四 曲率和短程曲率

1. **曲率** 圓半徑 R 的倒数 $\frac{1}{R}$ 叫作圓的曲率。这个概念可以应用紧張的細綫用机械的方式来闡明。

設給定了中心是 O、半徑是 R 的圓上的弧 $\overset{\frown}{AB}$。假設这段弧是由彈性細綫組成的，在它的兩个端点施加了相等的張力 T_1 和 T_2，分别朝着切綫的方向，如图 82 画的那样。

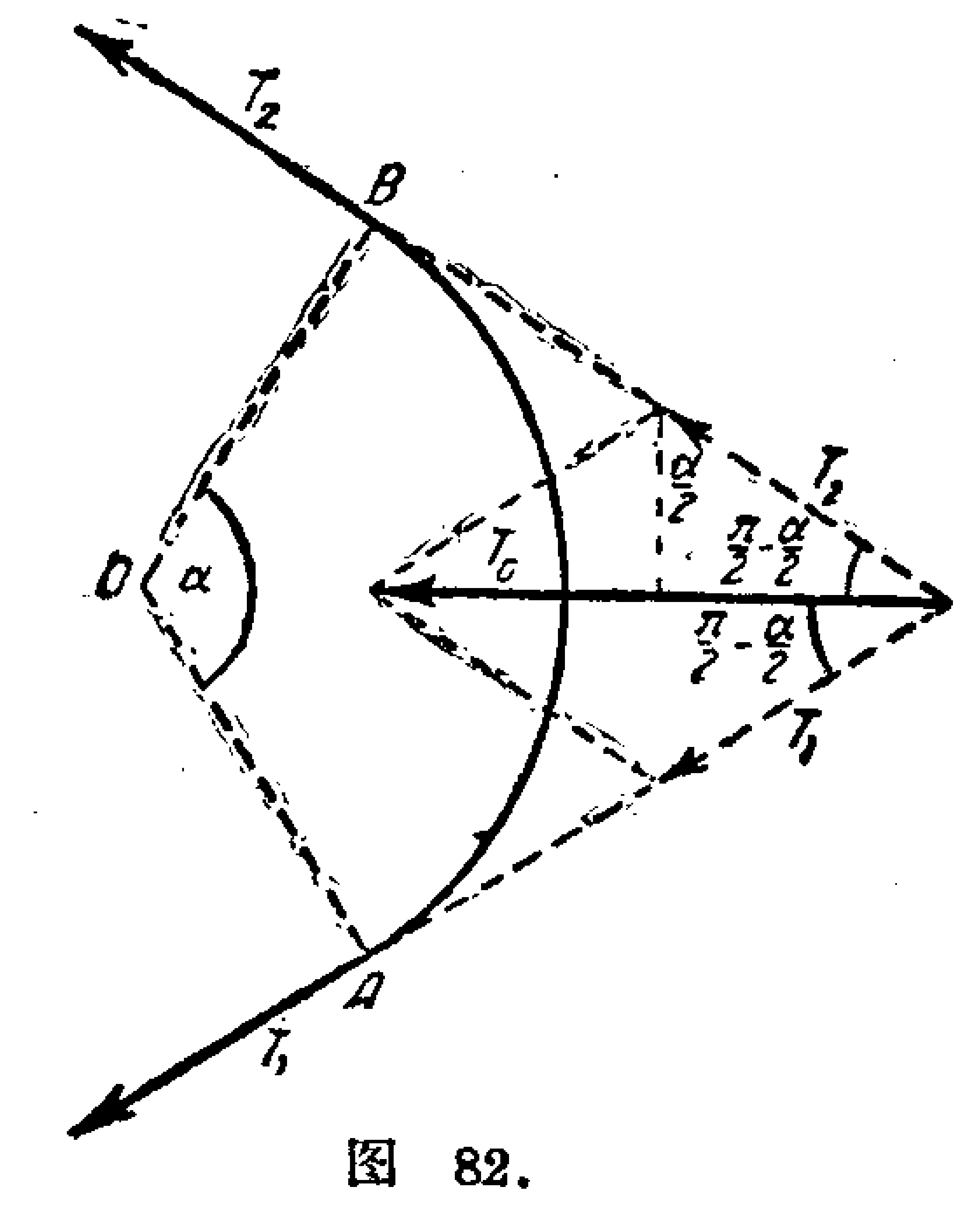


图 82.

T_1 和 T_2 的合力 T_0，方向是沿着力 T_1 和 T_2 的方向的交角的平分綫，也就是說，沿着平分弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的半徑的。如果这个弧用弧度来計算是 α 弧度，那末它的長度等于 $R\alpha$，而它所对的弦的長度等于 $2R\sin\frac{\alpha}{2}$。因为非常小的弧可以大致看作等于它的弦，由此就得到 $2R\sin\frac{\alpha}{2}\approx R\alpha$。这样，对于很小的角 α 就有 $\sin\frac{\alpha}{2}\approx\frac{\alpha}{2}$，就是說，很小的角用弧度表示，和它的正弦函数值大致相等。

注 更精确地說，当角趋于零的时候，角和它的正弦函数值的比趋

于 1．这个定理的証明可以在任何一本数学分析教程里找到，也可以在三角教科書里找到．

为了要使我們以后的推理严格化，有必要引进等价的无穷小量这个概念．

趋于零的变量叫作无穷小量．

設有一个和量 α 同时趋于零的量 β（例如，弧所对的弦的長度，和弧長同时趋于零）．若这时无穷小量 β 和 α 的比 $\frac{\beta}{\alpha}$ 也是无穷小量，那 β **就叫作比 α 阶次高的无穷小量**．例如，α^2 是比 α 阶次高的无穷小量．

兩个无穷小量 α 和 γ，假如它們的比趋于 1：

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\gamma}{\alpha}=1, \tag{1}$$

它們叫作等价．

例如，弧所对的弦和弧本身等价．

兩个等价的无穷小量 γ 和 α 的差，是一个阶次比它們高的无穷小量．事实上，由(1)就得到

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\gamma-\alpha}{\alpha}=0. \tag{2}$$

因此，当我們把某个无穷小量用和它等价的无穷小量来代替的时候，所产生的誤差是一个阶次比較高的无穷小量．例如，无穷小弧的長度和这个弧所对的弦的長度的差是一个阶次比較高的无穷小量．当我們把弧和弦等量齐观的时候，所产生的誤差比起这兩个量来是阶次比較高的无穷小量．

表示量 α 和 γ 的等价，我們用記法：$\alpha\approx\gamma$．

等价量的例：$\sin\alpha\approx\alpha$ 对于无穷小的 α 成立（这其实是等式 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$ 的一种写法）．

用弧度来量度的角 AOB 記作 α（图 82）．这时候力 T_1 和

力 T_2 的方向所夾的角等于 $\pi-\alpha$，而它們的方向和合力 T_0 的方向所夾的角等于 $\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$。

由图上可以看出，$T_0=2T\sin\frac{\alpha}{2}$，这里 T 是力 T_1 和 T_2 的共同的数值。

如果把弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的長度記作 s，那它的用弧度来量度的数值可以表示成：$\alpha=\frac{s}{R}$。

因此，
$$T_0=2T\sin\frac{s}{2R}.$$
如果弧 s 非常小，那末
$$\sin\frac{s}{2R}\approx\frac{s}{2R},$$
因此
$$T_0=T\frac{s}{R}.$$

現在再考慮任意曲綫 q 的情形。这条曲綫上包含点 A 的一段微小的弧可以看作圓弧（这圓的半徑 R 就是曲綫在点 A 的曲率半徑）。設我們的曲綫 q 是彈性細綫，在它上面的点有張力 T 作用着。这时候在我們所考慮的弧的兩端有兩个張力作用，根据前面所說，合力的方向沿着曲率半徑，合力的数值等于（精确地說是等价于）$T\frac{s}{R}$。

数量 $\frac{1}{R}$ 叫作我們的曲綫在点 A 的曲率。因此，作用在微小的弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上的力沿着主法綫方向，力的大小和弧長 s、曲率 $\frac{1}{R}$ 都成正比。

2. 短程曲率 現在我們来看曲面上曲綫 q 的一段微小的弧 s（图33），設 A 是这段弧的中点．用 $\frac{1}{R}$ 来記我們的曲綫

在点 A 的曲率，用 φ 来記曲綫 q 在点 A 的主法綫 AN 和曲面在点 A 的法綫 AN_1 之間的夾角. 在点 A 对这段弧有一个力作用着，力的方向沿着曲綫 q 在点 A 的主法綫，力的大小等于 $T\frac{s}{R}$. 这力可以分解成兩个力：一个力沿着曲面的法綫的方向（这个力被曲面的反作用力所抵消），另一个力和曲面相切. 这第二个力要使我們的弧在曲面上滑动. 它等于（或者正确些說，等价于）

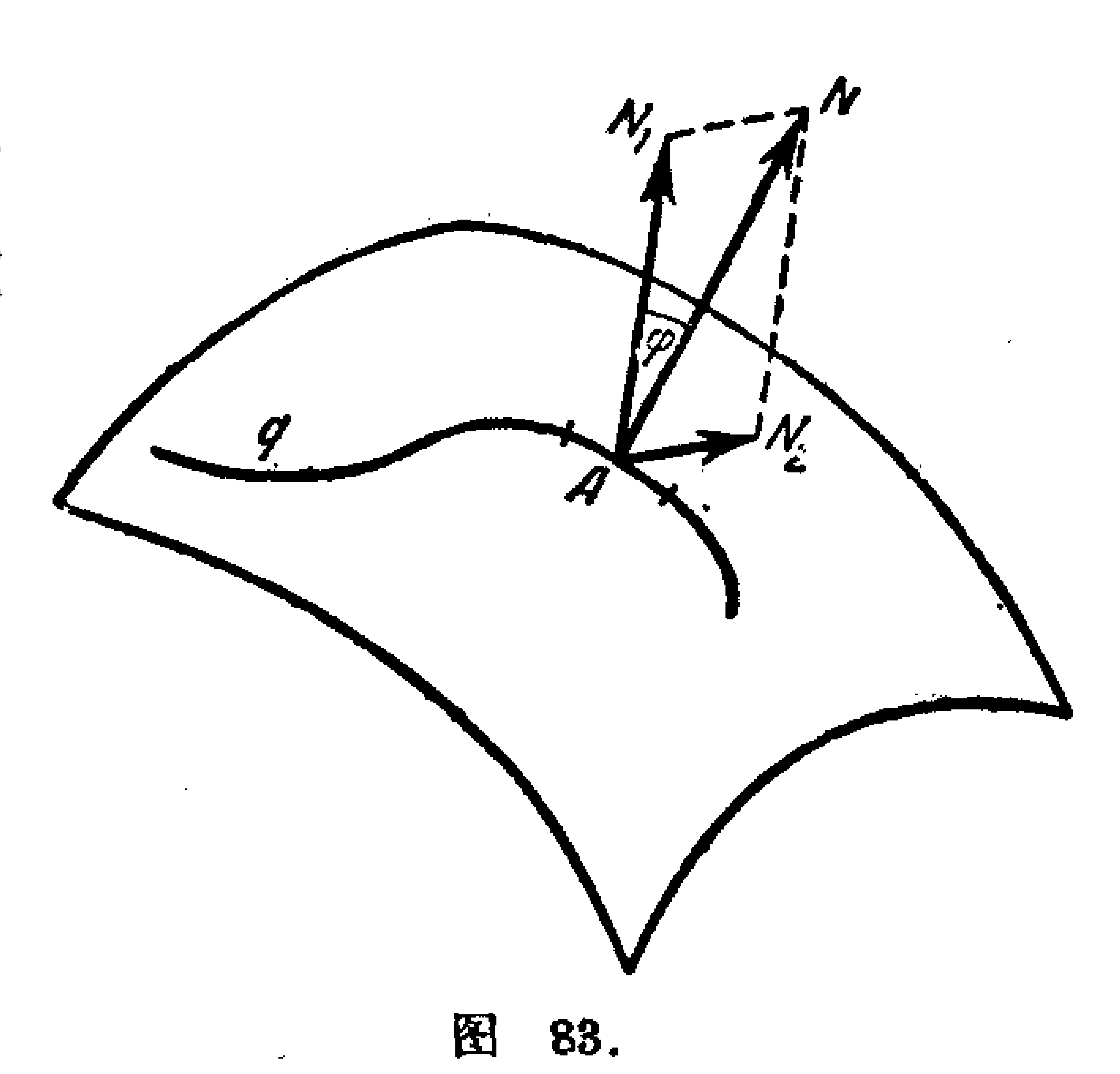


图 83.

$$\frac{Ts\sin\varphi}{R}=Ts\,\Gamma.$$

数量 $\Gamma=\frac{\sin\varphi}{R}$ 叫作曲綫 q 在点 A 的短程曲率. 它决定了在点 A 作用在紧張的細綫的弧上使这段弧在曲面上滑动的力的强度；这个作用在曲綫上微小弧段的力，是和弧長 s、短程曲率 Γ 都成正比的.

对于短程綫来說，$\varphi=0$，所以短程曲率等于零. 沿着短程綫，沒有任何力使曲綫弧在曲面上滑动（沿着短程綫綳紧的細綫是处在平衡位置的）.

一五 等 周 問 題

1. 圓弧長度的变动 設已經給定半徑 R 的圓 q 以及这

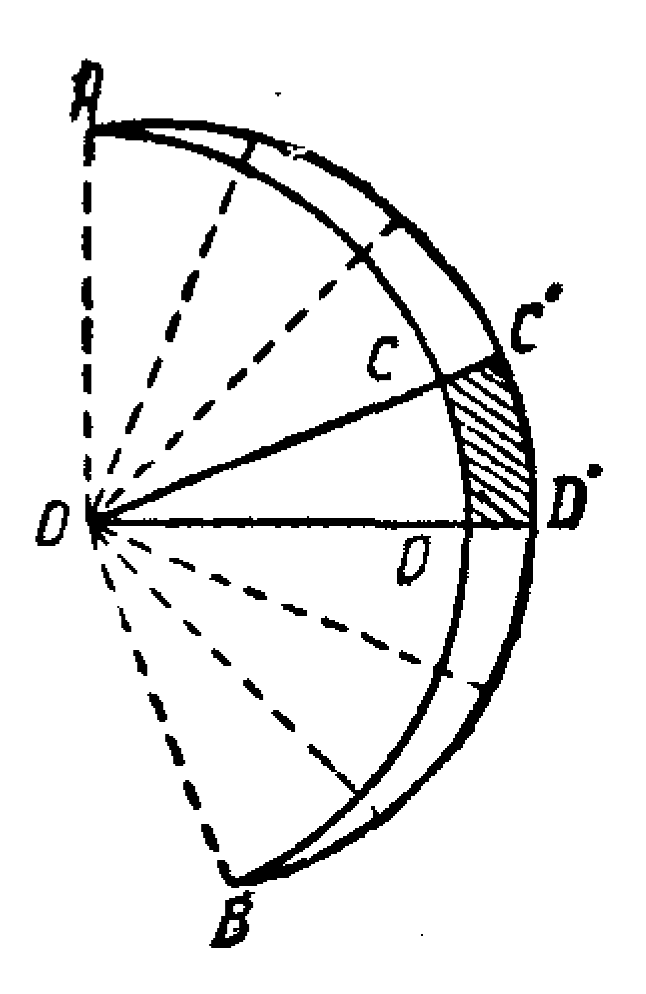


图 84.

个圆的弧 $\overset{\smile}{AB}$. 設 $\overset{\frown}{AB}$ 是和 $\overset{\smile}{AB}$ 接近的弧①. 用 l 表示弧 $\overset{\smile}{AB}$ 的長度，用 $l+\Delta l$ 表示弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的長度. 如果把弧 $\overset{\smile}{AB}$ 变动，使得它变成弧 $\overset{\frown}{AB}$，那它的長度增加了 Δl，因而它的位能增加了 $T\Delta l$. 我們把 $\overset{\smile}{AB}$ 变到 $\overset{\frown}{AB}$ 是这样作的，使得它的每一点 C 沿着半徑移动 (图 84). 設非常微小的弧 CD ($\overset{\smile}{AB}$ 的一部分) 变成也是非常微小的弧 $C'D'$ ($\overset{\frown}{AB}$ 的一部分). 这弧的每一点移动了一段距离 CC' (由于 CD 很微小，我們把它上面各点所經历的位移大致看作是相同的). 由我們的弧以及綫段 CC' 和 DD' 所包圍的微小面积 $CC'D'D$ 可以大致看作矩形，而如果 h 是微小的弧 CD 的長度，那末面积 $CC'D'D$ 大致等于② $h\cdot CC'$:

$$\text{面积 } CC'D'D \approx h\cdot CC'. \tag{1}$$

注意，作用在弧 CD 上的力，方向沿着半徑，大小等于 $\frac{Th}{R}$，这里 R 是我們的圓半徑. 把弧 CD 移动到和 $C'D'$ 重合所作的功等于力 $\frac{Th}{R}$ 乘距离 CC'，就是 $\frac{Th}{R}CC'$，或者 (見 (1))

$$\frac{Th}{R}CC' = \frac{T}{R}(\text{面积 } CC'D'D). \tag{2}$$

因此，把微小的弧 CD 移动到鄰近位置 $C'D'$ 所需要作的功等于(精确些說，是等价于) $\frac{T}{R}$ 乘上这个弧移动的时候扫过

① 在談到和圓弧接近的另外一条弧的时候，我們假設这条弧的点接近圓弧的点，这条弧的曲率接近圓弧的曲率.

② 大致相等就是等价的意思.

的面积 $CC'D'D$.

把包含在弧 $\overset{\smile}{AB}$ 和 $\underset{\frown}{AB}$ 之間的面积記作 ΔF. 用从中心 O 出发的半徑把这块面积分成許多小块的面积（和面积 $CC'D'D$ 类似的）. 这样一来，弧 $\overset{\smile}{AB}$ 也分成了許多很小的弧. 每一个这样的小弧 CD 在它运动的时候扫过了相应的一块面积 $CC'D'D$（包圍在这个弧、弧 $C'D'$ 以及半徑段 CC'、DD' 之間）. 完成这样一个移动所需要作的功等于 $\frac{T}{R}$ 乘上这个弧所扫过的面积. 把整个弧 $\overset{\smile}{AB}$ 移动到 $\underset{\frown}{AB}$ 位置总共所需要作的功等于上面所說那些功的总和，也就是那些小块面积的总和再乘上 $\frac{T}{R}$，也就是 $\frac{T}{R}\Delta F$，这里 ΔF 是弧 $\overset{\smile}{AB}$ 移动的时候所扫过的面积.

但是，所作的功等于由弧 $\overset{\smile}{AB}$ 变到弧 $\underset{\frown}{AB}$ 的时候位能的增量 ΔV：

$$\Delta V \approx \frac{T}{R}\Delta F. \tag{3}$$

另一方面，由第11节公式（2）得到：

$$\Delta V = T\Delta l, \tag{4}$$

这里 Δl 是長度的增量. 比較（3）式和（4）式，我們得到：

$$\frac{T}{R}\Delta F \approx T\Delta l$$

或者

$$\Delta l \approx \frac{1}{R}\Delta F. \tag{5}$$

弧 $\overset{\smile}{AB}$ 的長度的增量 Δl 等于（精确些說，是等价于）曲率 $\frac{1}{R}$ 乘上弧 $\overset{\smile}{AB}$ 和 $\underset{\frown}{AB}$ 之間所夾的面积①.

---

① 用这些等式所求得的結果和实际数值的誤差是比 Δl 阶次高的无穷小量.

2. 任意曲綫的弧的長度的变动 如果不用圓而用任意的曲綫，那它的微小的弧 $\overset{\smile}{AB}$ 可以看作半徑是 R 的圓弧（R 是曲率半徑），如果把 $\frac{1}{R}$ 了解作曲綫在弧 $\overset{\smile}{AB}$ 上某点的曲率，那公式（5）仍旧有效。

对于曲面上的曲綫来說，也有完全类似的关系，只要处处把曲綫的曲率换作短程曲率就可以了。这时候公式（5）就变成

$$\Delta l=\Gamma\Delta F, \tag{6}$$

这里 Γ 是短程曲率，Δl 是当曲綫的弧变到曲面上和它鄰近的弧的时候弧的長度的增量，而 ΔF 是起初的弧和变动后的弧之間所夾的面积。

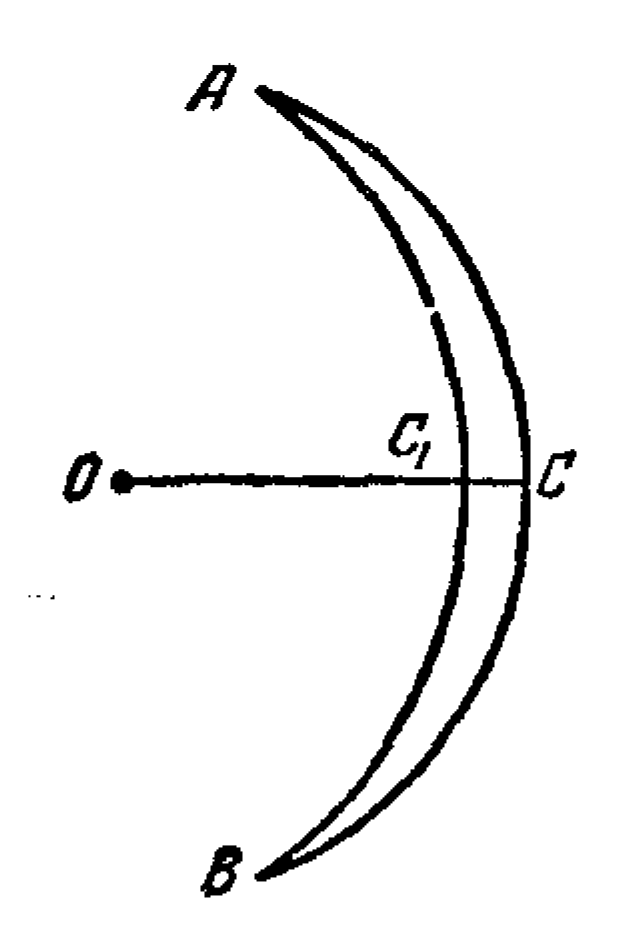


图 85.

在图 84 里，面积 ΔF 是在包含弧 $\overset{\smile}{AB}$ 的这个圓外面。在图 85 里，它是在圓的里面。在后一个情形，我們把面积 ΔF 看作是負的。圓弧長度的增量 Δl 也是負的（弧不是增長，而是縮短了）。

3. 等周問題 現在来看下面一个問題。在所包圍面积等于已經給定的常数量 F 的所有閉曲綫当中找出長度最短的。

我們假設这样的曲綫存在。要証明它是一个圓。

注意，常曲率的曲綫（就是說，在它每一点都有同一个曲率 $\frac{1}{R}$ 的曲綫）是圓。

我們作出这个事实的証明，但不十分严格。

常曲率 $\frac{1}{R}$ 的曲綫上非常微小的弧可以看作半徑是 R 的圓弧。整

个曲綫可以看作由大量的这种微小的弧所組成，而相鄰的兩个弧之間有部分的重迭。有同一半徑的兩个微小的圓弧，如果有部分的重迭，那合并起來共同組成一个新的也有同一半徑的微小圓弧。这样，把我們这条曲綫分割得出的这些微小的弧的每相鄰的一对，就組成了半徑是 R 的圓上的一段弧。繼續这样的推論，我們就可以相信，每 3、4、5…… 个微小的弧一个接一个，也組成半徑是 R 的圓上的一段弧，因此，整个曲綫也組成半徑是 R 的圓上的一段弧。若我們說的是一条常曲率 $\frac{1}{R}$ 的閉曲綫，那末这条曲綫簡直就是半徑是 R 的圓。

設我們有一条閉曲綫 q，它在所有包圍給定的面积大小 F 的閉曲綫当中有最短的長度。假設它不是一个圓，就是說，它的曲率并不到处都相等。

比如，設在这条曲綫的点 A 和点 B（图 86）曲率不同，并且分別等于 $\frac{1}{R_1}$ 和 $\frac{1}{R_2}$，这里

$$R_1 \neq R_2.$$

为确定起見，我們假設

$$\frac{1}{R_1} < \frac{1}{R_2}.$$

图 86.

我們来看曲綫 q 上包含点 A 和点 B 的微小的弧 $\overset{\frown}{CD}$ 和 $\overset{\frown}{C_1D_1}$。用一段鄰近的弧 $\overset{\frown}{CA'D}$ 来代替弧 $\overset{\frown}{CD}$，用鄰近的弧 $\overset{\frown}{C_1B'D_1}$ 来代替弧 $\overset{\frown}{C_1D_1}$。用 ΔF_1 来表示 $\overset{\frown}{CD}$ 和 $\overset{\frown}{CA'D}$ 所包圍的面积，用 ΔF_2 表示 $\overset{\frown}{C_1D_1}$ 和 $\overset{\frown}{C_1B'D_1}$ 所包圍的面积。由公式(5)，把弧 $\overset{\frown}{CD}$ 換作弧 $\overset{\frown}{CA'D}$ 的时候，曲綫 q 的長度得到的增量等于（确切些說，是等价于）$\frac{1}{R_1}\Delta F_1$，而把弧 $\overset{\frown}{C_1D_1}$ 換作弧 $\overset{\frown}{C_1B'D_1}$ 的时候，q 的長度得到的增量是 $\frac{1}{R_2}\Delta F_2$。q 所包圍的面积的总共增量等于 $\Delta F_1+\Delta F_2$，

而曲綫長度的增量等于(等价于)

$$\frac{1}{R_1}\Delta F_1+\frac{1}{R_2}\Delta F_2.$$

現在,我們这样地选擇弧 $\overset{\frown}{CA'D}$ 和 $\overset{\frown}{C_1B'D_1}$,使得 ΔF_1 和 ΔF_2 的絕对值相等而符号相反,比如 $\Delta F_1>0$,而 $\Delta F_2=-\Delta F_1<0$. 这时候面积的增量 $\Delta F_1+\Delta F_2=0$,就是,当我們改变曲綫 q 的时候,面积不变. 而曲綫 q 的長度的增量等于(精确些說,是等价于)

$$\Delta F_1\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right),$$

但因为

$$\frac{1}{R_1}<\frac{1}{R_2},$$

所以

$$\Delta F_1\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)<0.$$

所以,曲綫 q 的增量是負的. 曲綫 q 变成了另一条長度比較短的曲綫 q_1,它們所包圍的面积却一样大小. 可知,q 并不是在所有包圍給定面积大小的閉曲綫当中長度最短的.

由这里就得出結論: 在包圍給定面积大小的所有閉曲綫当中,長度最短的是圓.

4. **曲面上的等周問題** 在曲面上也可以来考虑类似的問題,不过把曲率处处都用短程曲率 $\Gamma=\frac{\sin\varphi}{R}$ 来代替. 例如,若在有短程曲率 $\Gamma=\frac{\sin\varphi}{R}$ 的曲綫 q 上,把微小的弧 $\overset{\frown}{CD}$ 用它鄰近的弧 $\overset{\frown}{CA'D}$ 来代替,而 $\overset{\frown}{CD}$ 和 $\overset{\frown}{CA'D}$ 之間所夾的面积等于 ΔF,那末把 $\overset{\frown}{CD}$ 換成 $\overset{\frown}{CA'D}$ 的时候,曲綫長度的增量 Δl 可以表达作:

$$\Delta l=\Delta F\frac{\sin\varphi}{R}=\Gamma\Delta F.$$

重复前面定理的証明，但到处用短程曲率来代替曲率，我們就得到下面的定理。

在曲面上包圍給定面积大小的所有閉曲綫当中，常短程曲率的曲綫長度最短(在球面上，这样的曲綫是大圓和小圓)。

注 在球面上，也同在平面上一样，常短程曲率的曲綫是短程圓。在其他曲面上，常短程曲率的曲綫，一般来說，并不一定是短程圓。

第六章

費馬原理和它的推論

一六 費馬原理

1. 費馬原理 在几何光学里，和所謂費馬原理有关的問題，非常接近于我們所考虑的問題。

我們来考虑一种平面的光学媒質，在它的每一点 $A(x,y)$，光速和点 A 的位置有关，就是 $v=v(x,y)=v(A)$。若在各点的光速都相同，那末这种光学媒質叫作均匀的。

用光的速度来走完曲綫 q 所需要的时間叫作曲綫 q 的光学長度。

在光速等于 v 的均匀光学媒質里，曲綫 q 的光学長度和普通長度 $l(q)$ 成正比，等于

$$T(q)=\frac{1}{v}l(q).$$

費馬原理 在光学媒質里，光綫由点 A 到点 B 所走的途徑是联結点 A 到点 B 的所有曲綫当中光学長度最短的一条。

由这里就得出，在均匀的光学媒質里，光綫沿直綫傳播.

2. 反射律 設在均匀的光学媒質里給定了一条能够反射光綫的曲綫 s（曲面鏡）（图87）. 要求出光綫从点 A 出发、經过曲綫 s 反射以后达到点 B 所走的曲綫 q_0. 曲綫 q_0 是所有联結由点 A 經 s 反射而达到点 B 的曲綫 q 当中最短的一条. 可知这条曲綫（見第5节）是折綫 ACB，它的頂点 C 在曲綫 s 上，而角 ACB 的平分綫 CD 是曲綫 s 在点 C 的法綫.

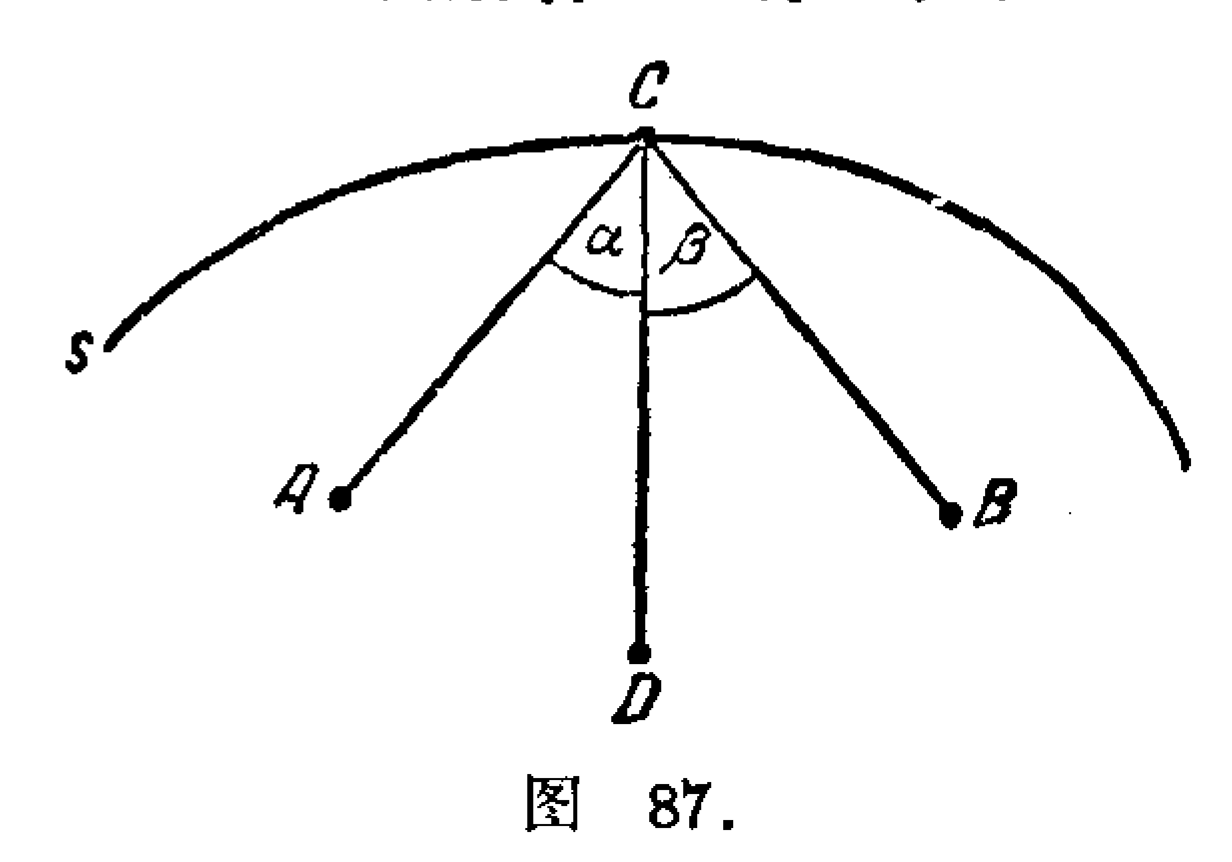


图 87.

光綫 AC、CB 和法綫 CD 的夾角 $ACD=\alpha$ 和 $DCB=\beta$ 分別叫作入射角和反射角. 我們就得到了笛卡尔的光綫反射律：入射角等于反射角.

由第 11 节所說的关于橢圓和拋物綫的法綫性質，可以推得：

若曲綫 s 的形狀是橢圓，那末由这个橢圓的焦点 F 发出的光，經过反射以后会聚在另一个焦点 F_1 上（图 88）.

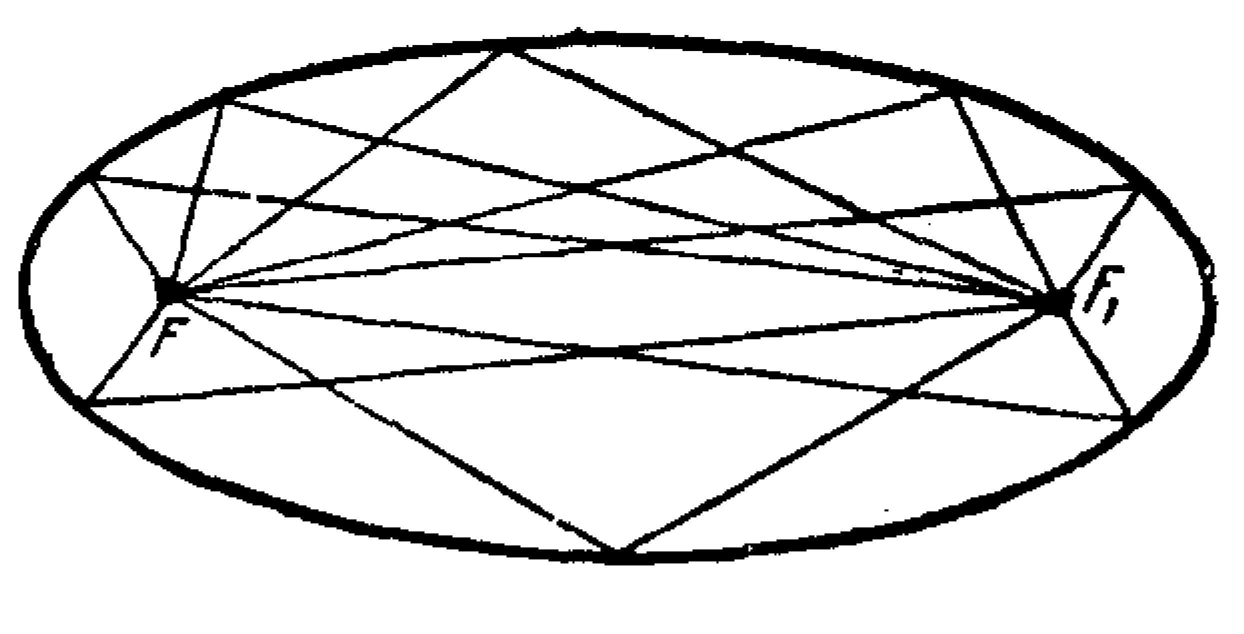


图 88.

若曲綫 s 的形狀是拋物綫，那末由拋物綫的焦点发出的光，經过反射以后变成和拋物綫軸平行的光綫；反过来，和拋物綫軸平行的光綫，經过反射以后会聚在拋物綫的焦点上

(图 89).

在探照灯、反射望远鏡等仪器里，要求把鏡面造成回轉抛物面(把抛物綫繞着它的軸回轉所得的曲面)，就是根据抛物綫的这个性質.

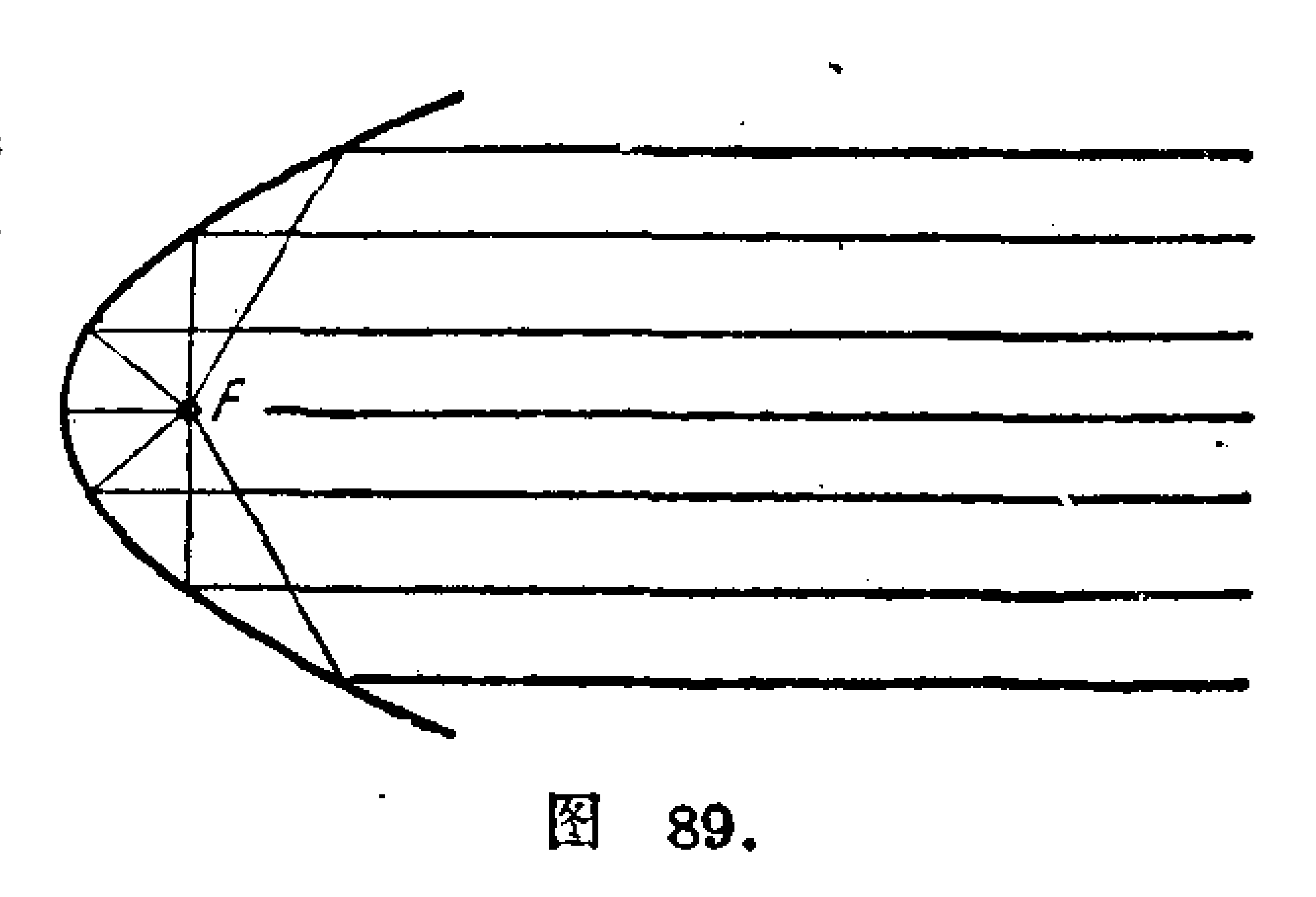


图 89.

3. **折射律** 現在我們来看由一条分界曲綫 s 分开的兩种均匀的光学媒質Ⅰ和Ⅱ (見图81)；在媒質Ⅰ里光速等于 v_1，在媒質Ⅱ里光速等于 v_2. 求出由媒質Ⅰ里的点 A 到媒質Ⅱ里的点 B 的光綫途徑.

我們来考虑所有可能的联結点 A 和点 B 的曲綫 q，它們由在媒質Ⅰ里的弧 $\overset{\frown}{AC}$ 和媒質Ⅱ里的弧 $\overset{\frown}{CB}$ 拼成，C 是在 s 上的一点。曲綫 q 的光学長度 $T(q)$ 等于

$$T(q)=T(\overset{\frown}{AC})+T(\overset{\frown}{CB})=\frac{l(\overset{\frown}{AC})}{v_1}+\frac{l(\overset{\frown}{CB})}{v_2}. \tag{1}$$

設曲綫 q_0 是在所有的曲綫 q 当中有最短的光学長度的一条.

我們再考虑一条均匀的柔韌細綫 q，兩端系在点 A 和点 B，它的中間一点 C 在曲綫 s 上滑动，而在細綫 q 的 AC 部分，張力等于 $T_1=\frac{1}{v_1}$，在 CB 部分，張力等于 $T_2=\frac{1}{v_2}$.

由第13节的(2)式，位能 $V(q)$ 等于

$$V(q)=\frac{l(\overset{\frown}{AC})}{v_1}+\frac{l(\overset{\frown}{CB})}{v_2}. \tag{2}$$

比較（1）、（2）兩式，我們得到：

$$T(q)=V(q).$$

細綫 q 的位能和它的光学長度相等。可知曲綫 q 当中有最短光学長度的曲綫 q_0，就是曲綫 q 当中有最小位能的一条。

由第13节的（4）式，q_0 是折綫 AC_0B。設 α 和 β 分别是綫段 AC_0、C_0B 和曲綫 s 在点 C_0 的切綫 LL_1 的夾角。由第13节的（4）式，我們有：

$$\frac{\cos\alpha}{v_1}=\frac{\cos\beta}{v_2}. \qquad (3)$$

这就是光綫的折射律。設 α_1 和 β_1 分别是角 α 和 β 的余角，也就是綫段 AC_0、C_0B 和 s 在点 C_0 的法綫的交角。角 α_1 叫作**入射角**，角 β_1 叫作**反射角**。公式（3）可以写成：

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1}=\frac{\sin\beta_1}{v_2}.$$

一七 折射曲綫

1. 最簡單的情形 設平面被平行于 x 軸的直綫分成了許多条帶形，在每一条帶形里，光速等于常数（图90）。在某兩条帶形里分别取点 A 和点 B。設帶形 M_0 包含点 A，帶形 M_n 包含点 B；在这兩条帶形中間还依次有帶形 M_1、M_2……M_{n-1}。設在帶形 M_0 里光速等于 v_0，在 M_1 里等于 v_1……在 M_n 里等于 v_n。从点 A 到点 B 的光綫，形狀如折綫 $AC_1C_2\cdots\cdots C_nB$，它的各頂点就在帶形之間的分界綫上。这条折綫的各条边 AC_1、C_1C_2、C_2C_3……$C_{n-2}C_{n-1}$、$C_{n-1}C_n$、C_nB 和平行于 x 軸的直綫之間的夾角，分别記作 α_0、α_1、α_2……α_{n-1}、α_n。在点 C_1 有

下列的关系成立：

$$\frac{\cos\alpha_0}{v_0}=\frac{\cos\alpha_1}{v_1}$$

（依照折射律）；在点 C_2 有：

$$\frac{\cos\alpha_1}{v_1}=\frac{\cos\alpha_2}{v_2}$$

等等，最后，在点 C_n 有：

$$\frac{\cos\alpha_{n-1}}{v_{n-1}}=\frac{\cos\alpha_n}{v_n}.$$

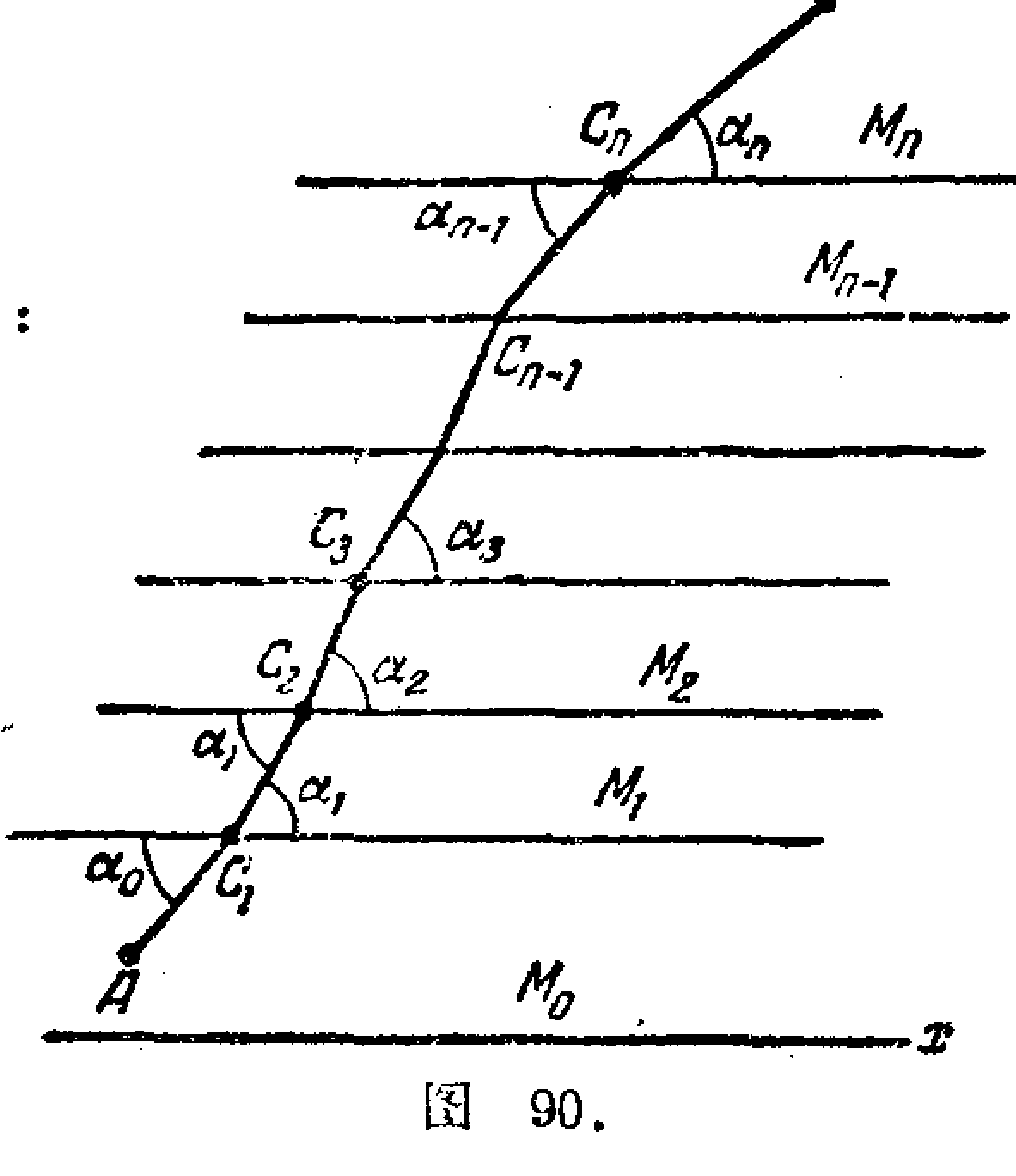


图 90.

从这里就得到：

$$\frac{\cos\alpha_0}{v_0}=\frac{\cos\alpha_1}{v_1}=\frac{\cos\alpha_2}{v_2}$$

$$=\cdots\cdots=\frac{\cos\alpha_{n-1}}{v_{n-1}}=\frac{\cos\alpha_n}{v_n}. \qquad (1)$$

用 c 表示这个公共比值，那上式可以写成：

$$\frac{\cos\alpha}{v}=c, \qquad (2)$$

这里，α 是折綫的某条边和 x 軸的夾角，v 是沿着这一条边的光速。

在折綫任何一条边上某点的折綫的切綫，就是这条边所在的直綫．因此，等式里的 α 可以看作折綫在它某点的切綫和 x 軸的夾角，而 v 是在这一点的光速．

2. 折射曲綫 我們看一种光学媒質，在它里面某一点的光速随这一点的縱坐标而变：

$$v=v(y),$$

这里 v 是 y 的連續函数．在这种媒質里，光綫的途徑 q 是那样的曲綫，沿着这种曲綫有下列的关系成立：

$$\frac{\cos\alpha}{v}=c, \tag{3}$$

这里 v 是曲綫 q 上任一点 C 的光速(图 91),α 是 q 在点 C 的切綫和 x 軸的夾角,c 是常数(和点 C 在曲綫上的位置无关).

为了要建立等式(3),我們把光速在这个媒質里的变化情况略为变动一下,把媒質分成許多寬度是 h 的狹窄帶形,把每一条帶形里的光速看作常数,比如說,等于在这条帶形中綫上(图 91)的光速. 这样,按照前面所說的从点 A 到点 B 的光綫途徑是折綫 $(AB)_h$,这折綫的各頂点就在各条帶形的分界綫上,根据以前所說,折綫 $(AB)_h$ 是满足(3)式的. 我們把光速的变化情况作了些变动,但是我們的帶形取的越狹窄,那变动就越小.

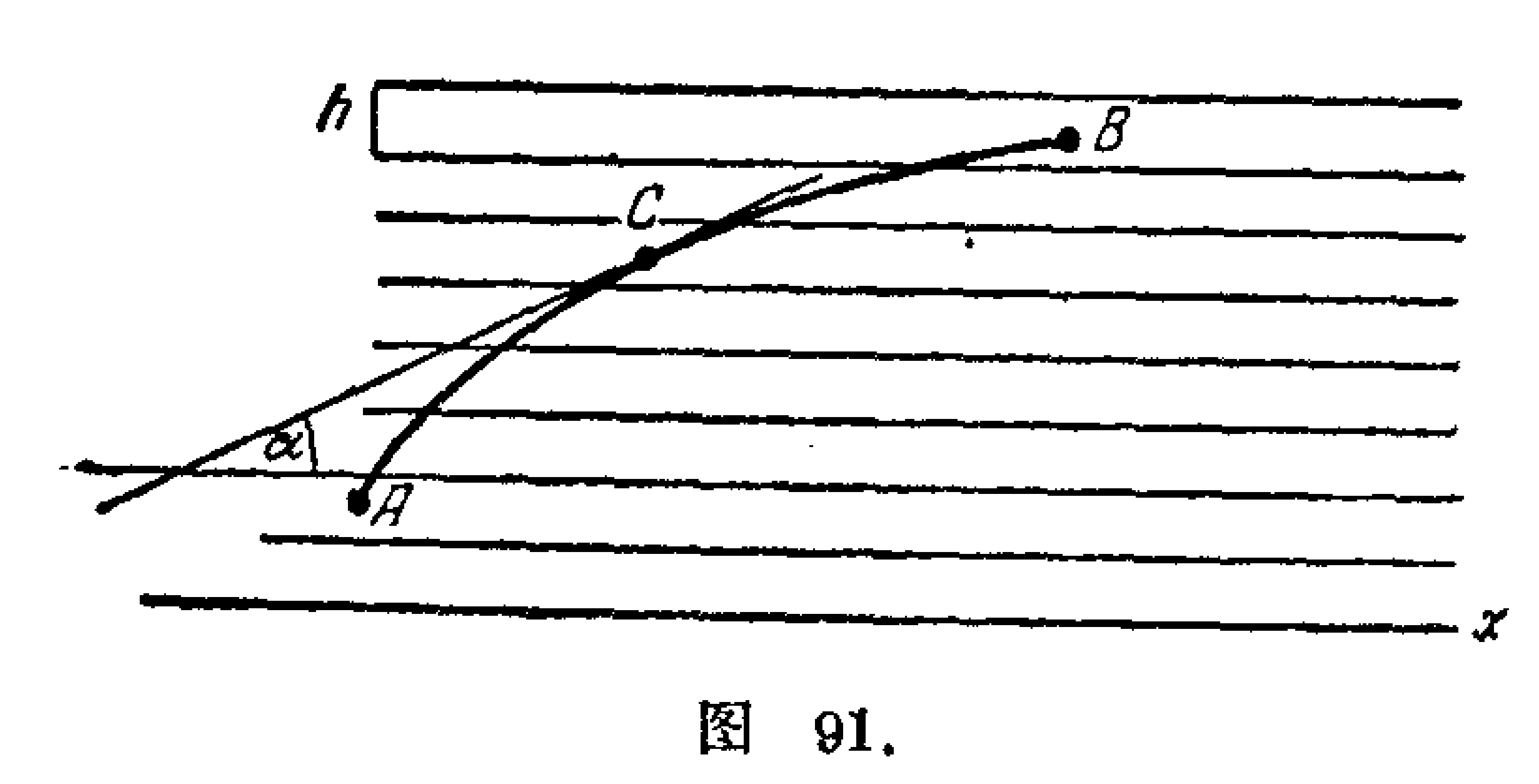


图 91.

当帶形的寬度 h 趋于零的时候,那极限就是原来所說的光速連續变化的情形. 这时候折綫 $(AB)_h$ 趋于曲綫 q,q 也会满足条件(3).

3. 罗巴切夫斯基几何学的潘加萊模型 把用 x 軸作界的上半平面看作一种光学媒質,設在这种媒質里各点的光速等于点的縱坐标:

$$v=y.$$

在这种媒質里的光綫是中心在 x 軸上的半圓(图92).

我們来看这样用 x 軸上的点 O 作中心的半圓 q. 在它的

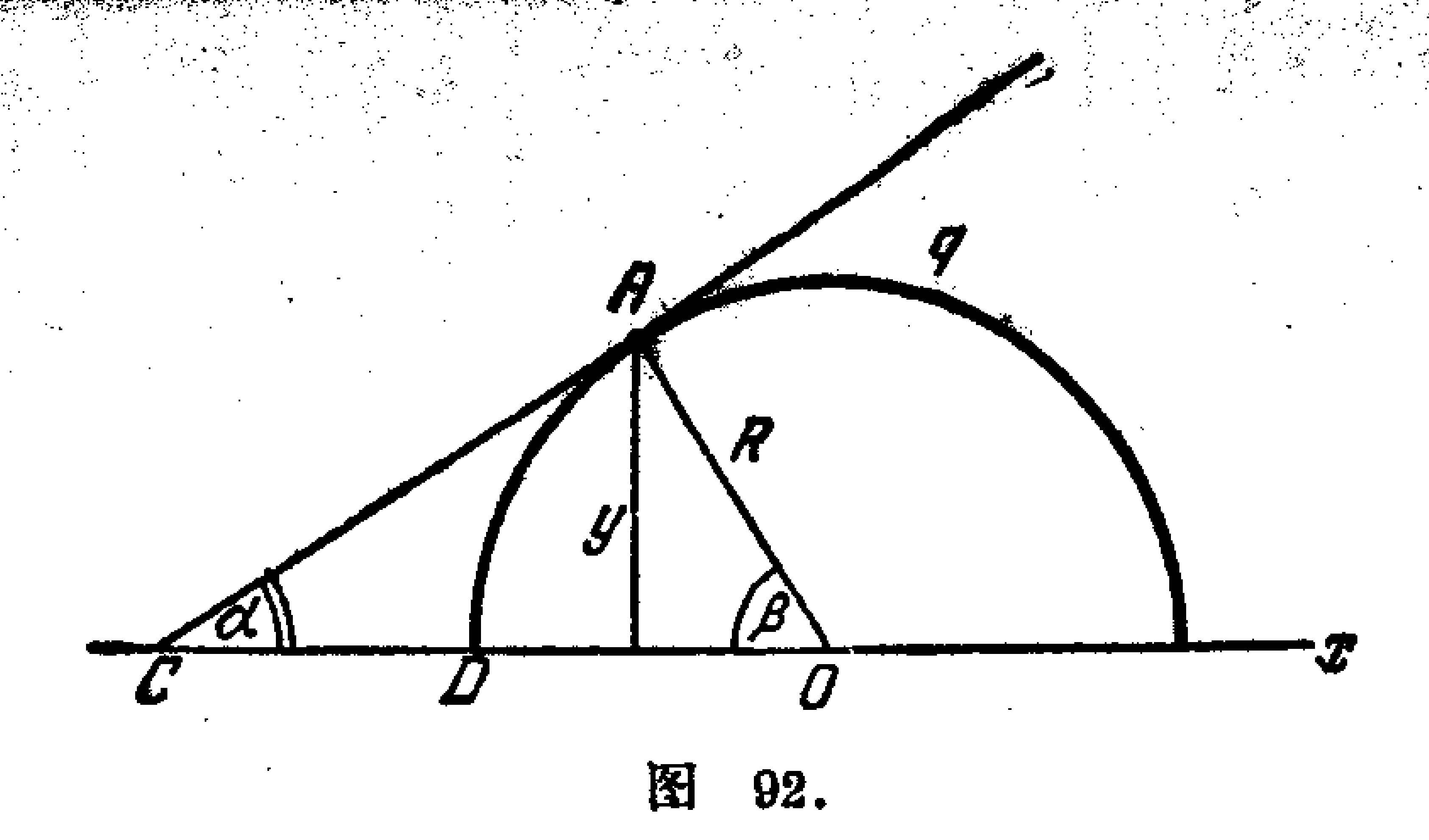


图 92.

点 A 設縱坐标是 y，在这一点的切綫和 x 軸的交角 ACO 是 α。若这个圓的半徑是 R，那末

$$y=R\sin\beta,$$

这里
$$\beta=\angle AOC=\frac{\pi}{2}-\alpha,$$

或
$$y=R\cos\alpha,$$

也就是
$$\frac{\cos\alpha}{y}=\frac{1}{R}.$$

这样，半圓 q 滿足我們的 (3)式，也就是在这种媒質里光綫的方程。随着和 x 軸的接近，光速趋近于零。

可以証明，半圓 q 上，一端在 x 軸上的 AD 段有无穷大的光学長度。因此，x 軸上的点叫作“无穷远”点。

我們把中心在 x 軸上的半圓看作“直綫”，这种半圓上的弧的光学長度看作直綫的“長度”，这样的直綫之間的交角就是半圓在它們交点上的交角（切綫間的交角）。

我們就得到了一种平面几何学，在这种几何学里，普通平面几何学里的許多命題仍旧有效。比方，通过兩点可以引唯一的一条“直綫”（在半平面上，通过兩点只能引一个用 x 軸上

的点作中心的半圓)。在联結兩点的所有曲綫当中，用这兩点作端点的“直綫”“長度”最小。兩条有公共“无穷远点”的直綫也就是在 x 軸相切而中心在 x 軸上的兩个半圓，自然会看作是“平行的”。通过不在“直綫” q 上的一点 A 可以引 q 的兩条平行“直綫” q_1 和 q_2（图 93）。这兩条直綫把半平面分成四个用 A 作頂点的“角”。通过点 A 而在第一对对頂角 I 和 II 里的直綫 s_1，和“直綫” q 有交点。所有在对頂角 III 和 IV 里的直綫 s_2 和 q 不相交。

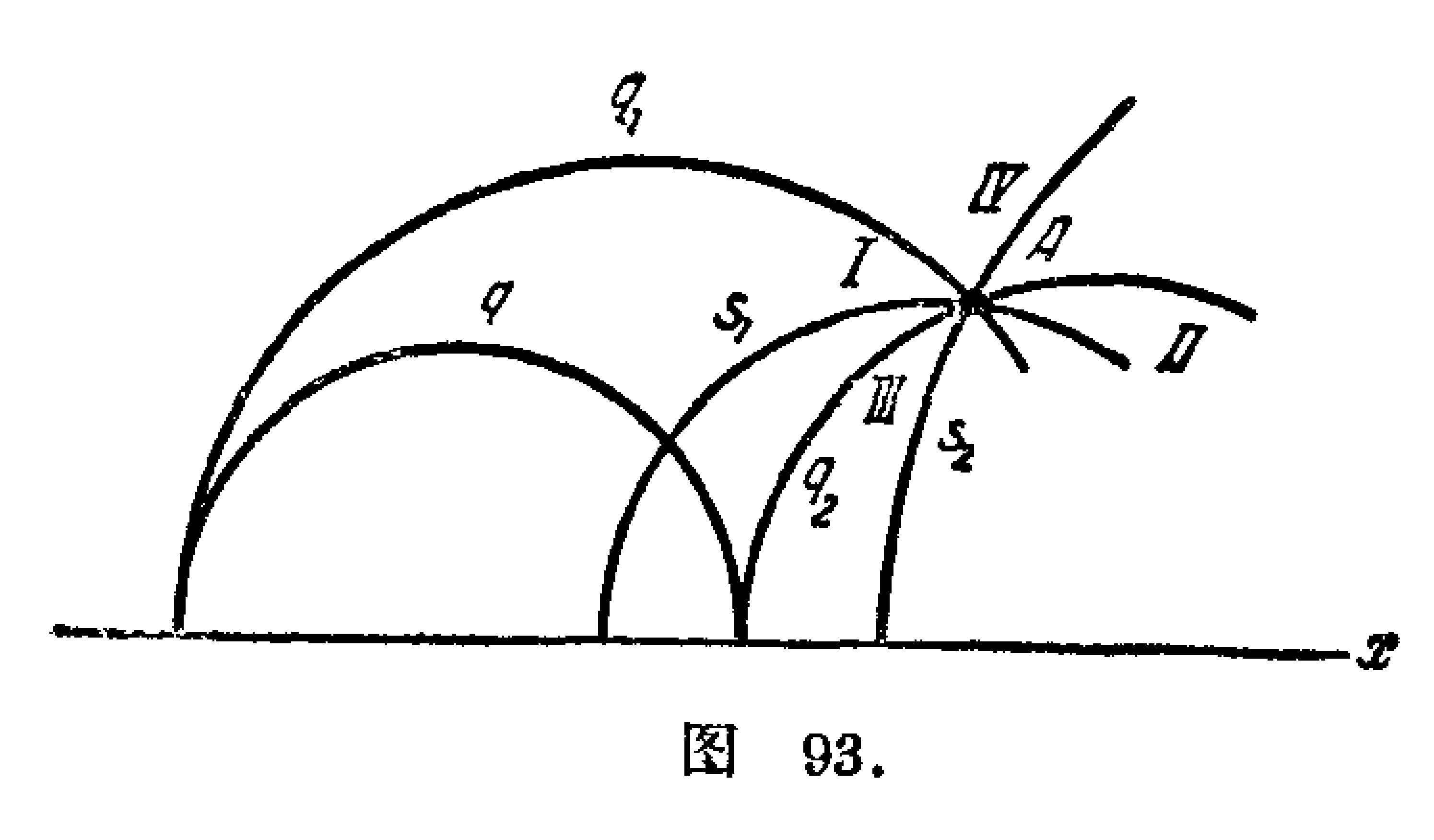


图 93.

我們在平面上得到了罗巴切夫斯基几何学的一种实現，这就是所謂罗巴切夫斯基几何学的潘加萊模型。

一八 捷綫問題

1. 旋輪綫 設半徑是 R 的圓 K 在直綫 LL_1 上滾动，这条直綫我們就取作 x 軸(图94)。圓周的运动是由兩个运动組成的：(1)繞着中心 O、角速度是 ω 的轉动；圓周上点的綫速度因而等于 $v=R\omega$；(2)平行于軸 x 用同一个 v 作速度的移动。这时候圓周上的点 A 所描出的曲綫叫作旋輪綫。

設在时間 $t=0$ 的时候，点 A 在 x 軸上（見图 94）。到时間 t 的时候，圓周轉了一个角度 $\beta=t\omega$。在这个时刻，点 A 的縱坐标等于

$$y=R(1-\cos\beta)=2R\sin^2\frac{\beta}{2}. \qquad (1)$$

我們来确定这一时刻点 A 的速度的方向。这是旋輪綫的切綫方向。

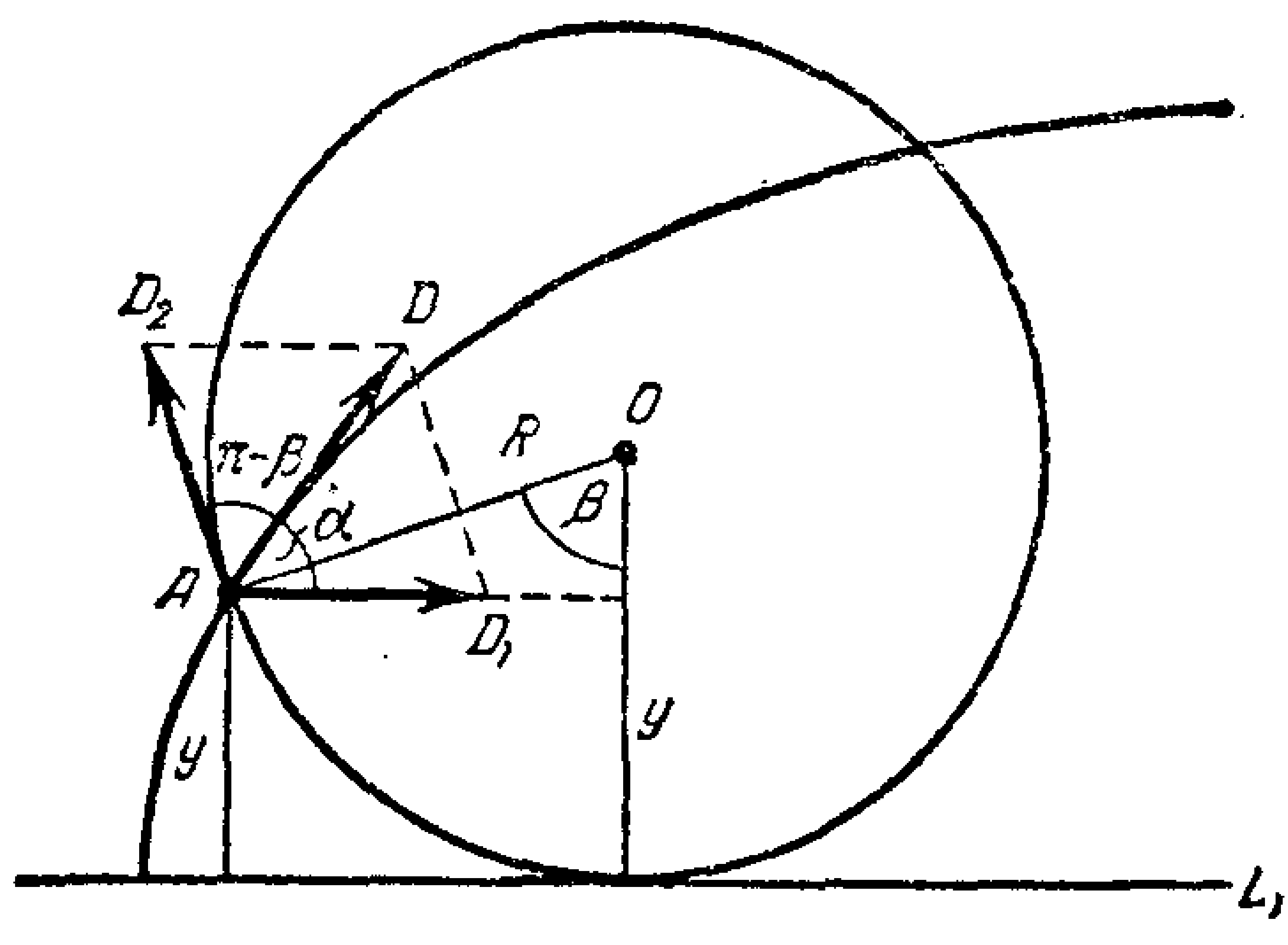


图 94.

移动的速度 $T_1=AD_1$ 等于 v，方向平行于 x 軸。沿圓周运动的速度 $T_2=AD_2$ 也等于 v，方向沿着圓的切綫。角 D_1AD_2 等于 $(\pi-\beta)$。按平行四边形法則把这兩个速度加起来就求出点 A 沿旋輪綫运动的速度。它的方向沿着角 D_1AD_2 的平分綫，和 x 軸的方向成角

$$\frac{1}{2}(\pi-\beta)=\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}$$

(見图91)。这样，在点 A 的旋輪綫切綫和 x 軸的夾角等于

$$\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}.$$

因此

$$\cos\alpha=\sin\frac{\beta}{2}. \qquad (2)$$

由公式(1)和(2)就得出

$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{y}{2R}}$$

或

$$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{y}}=c. \qquad (3)$$

式(3)把旋輪綫在点 A 的切綫的傾斜角 α 和这一点的縱坐标

联系起来．反过来，满足这个式的曲綫是旋輪綫．

2. 捷綫問題 設 A 和 B 是兩点（假定点 B 的位置比点 A 的低（图 95））．用曲綫 q 联結点 A 和 B；初速是 0 的点在重力作用之下沿着曲綫 q 从点 A 到点 B 所費去的时間叫作沿曲綫 q 的**降落时間**．

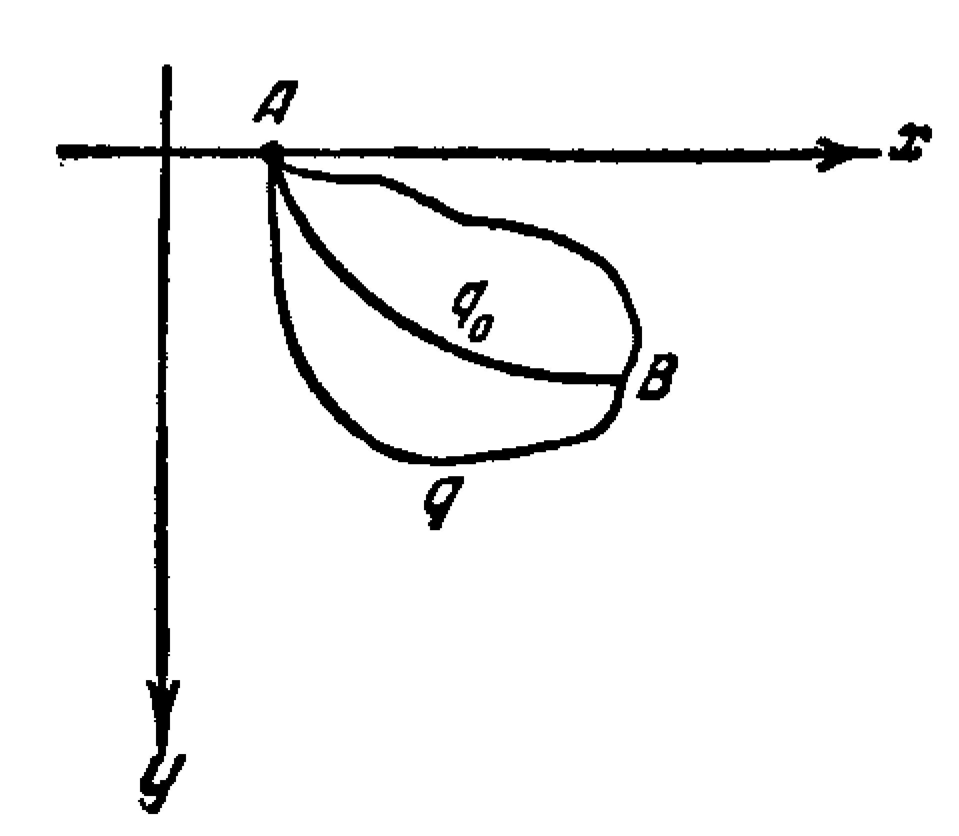


图 95.

要求联結点 A 和 B 的最速降綫 q（最速降綫也叫捷綫），就是沿着它从 A 到 B 的降落时間最短的曲綫．

在包含点 A 和 B 的垂直平面上，取点 A 所在的水平直綫作 x 軸，而 y 軸取向下的方向．初速是 0、在重力作用之下运动的点，它的速度 v 和縱坐标 y 之間有下列关系：

$$v^2=2gy$$

或

$$v=\sqrt{2g}\sqrt{y}. \tag{4}$$

我們取一种光学媒質，設在它里面的光速 v 由公式(4)决定；曲綫 q 的光学長度就和沿这条曲綫的降落时間相等．光綫从点 A 到点 B 所取的途徑 q_0 是所有联結点 A 和 B 的曲綫当中有最短光学長度的曲綫；因此 q_0 和捷綫重合．

曲綫 q_0 满足等式（見第 17 节的(3)式）

$$\frac{\cos\alpha}{v}=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{2g}\sqrt{y}}=c\ (c\text{ 是常数})$$

或

$$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{y}}=c_1\quad (c_1=c\sqrt{2g}).$$

根据前面所說的旋輪綫的性質（見公式(3)），我們从这里就知

道捷綫是旋輪綫的弧.

一九 悬鏈綫和最小囘轉曲面問題

1. **悬鏈綫** 重而均匀的鏈子(或不可伸長的細綫)兩端系在兩点 A、B，在重力的作用下处在平衡狀态的时候，它所形成的曲綫叫作悬鏈綫(图 96)(鏈子均匀的意思是指它的密度 ρ 是常数；鏈子上任何長度等于 h 的一段总是有質量 ρh).

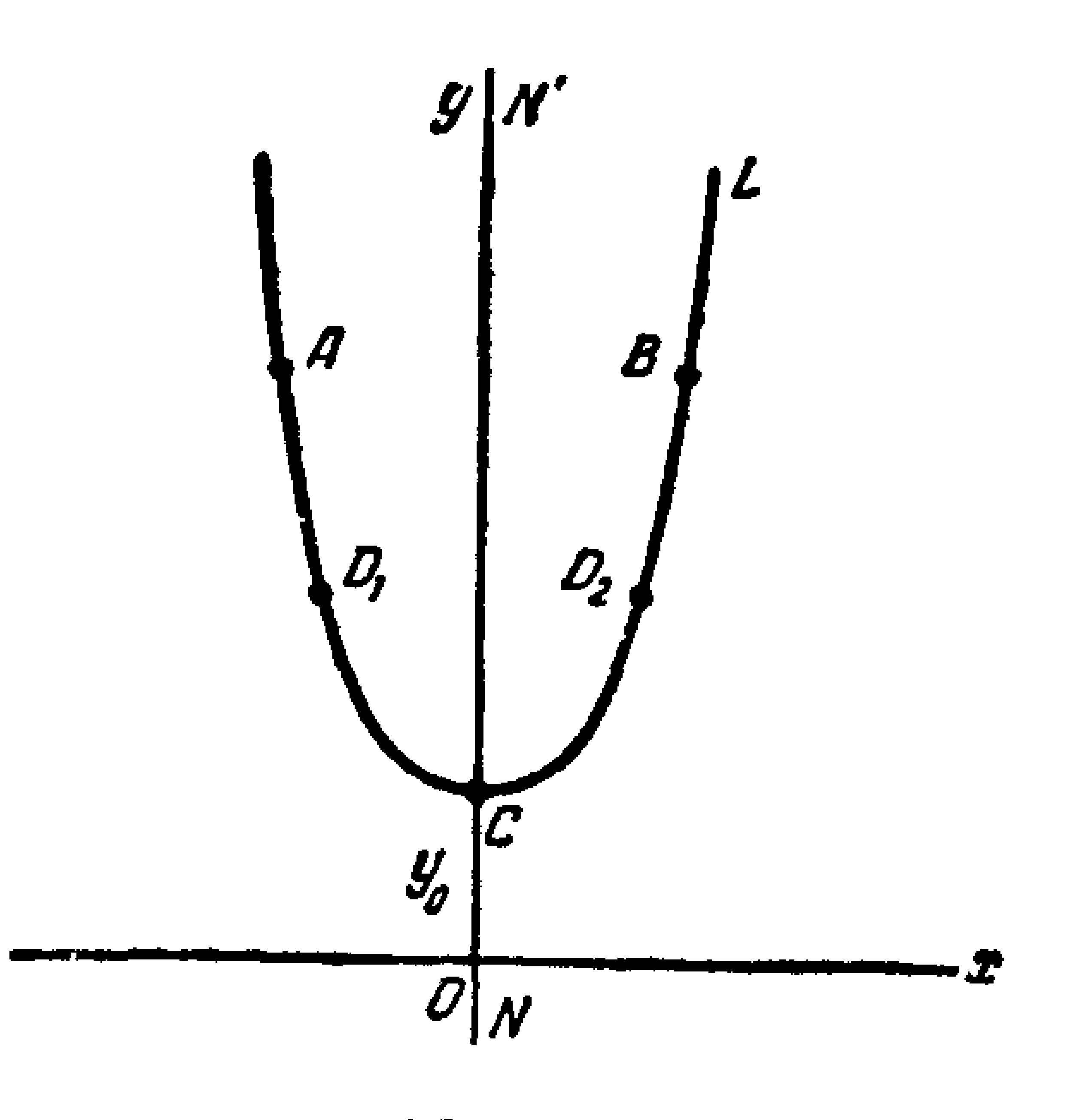


图 96.

如果又把鏈子 $\overset{\frown}{AB}$ 在点 D_1 和 D_2 系住，那末鏈子 $\overset{\frown}{D_1D_2}$ 部分的平衡位置不变动. 悬鏈綫 $\overset{\frown}{AB}$ 是悬鏈綫 $\overset{\frown}{D_1D_2}$ 的延長. 可以把悬鏈綫看作是在兩头都无限延長出去的，而曲綫 $\overset{\frown}{AB}$ 只是无限悬鏈綫的一部分.

悬鏈綫上处在最低位置的点 C 叫作悬鏈綫的頂点. 无限悬鏈綫关于通过頂点的垂直軸 NN' 是对称的. 我們把这个軸取作 y 軸.

我們来考虑悬鏈綫右側的一部分 $\overset{\frown}{CL}$. 用 y 表示悬鏈綫上某点 D 的縱坐标(图 97)，用 α 表示在这一点的切綫和 x 軸的夾角，用 s 表示悬鏈綫弧 $\overset{\frown}{CD}$ 的長度.

把悬鏈綫在点 C 和 D 固定. 作用在点 D 的力 P 叫作鏈

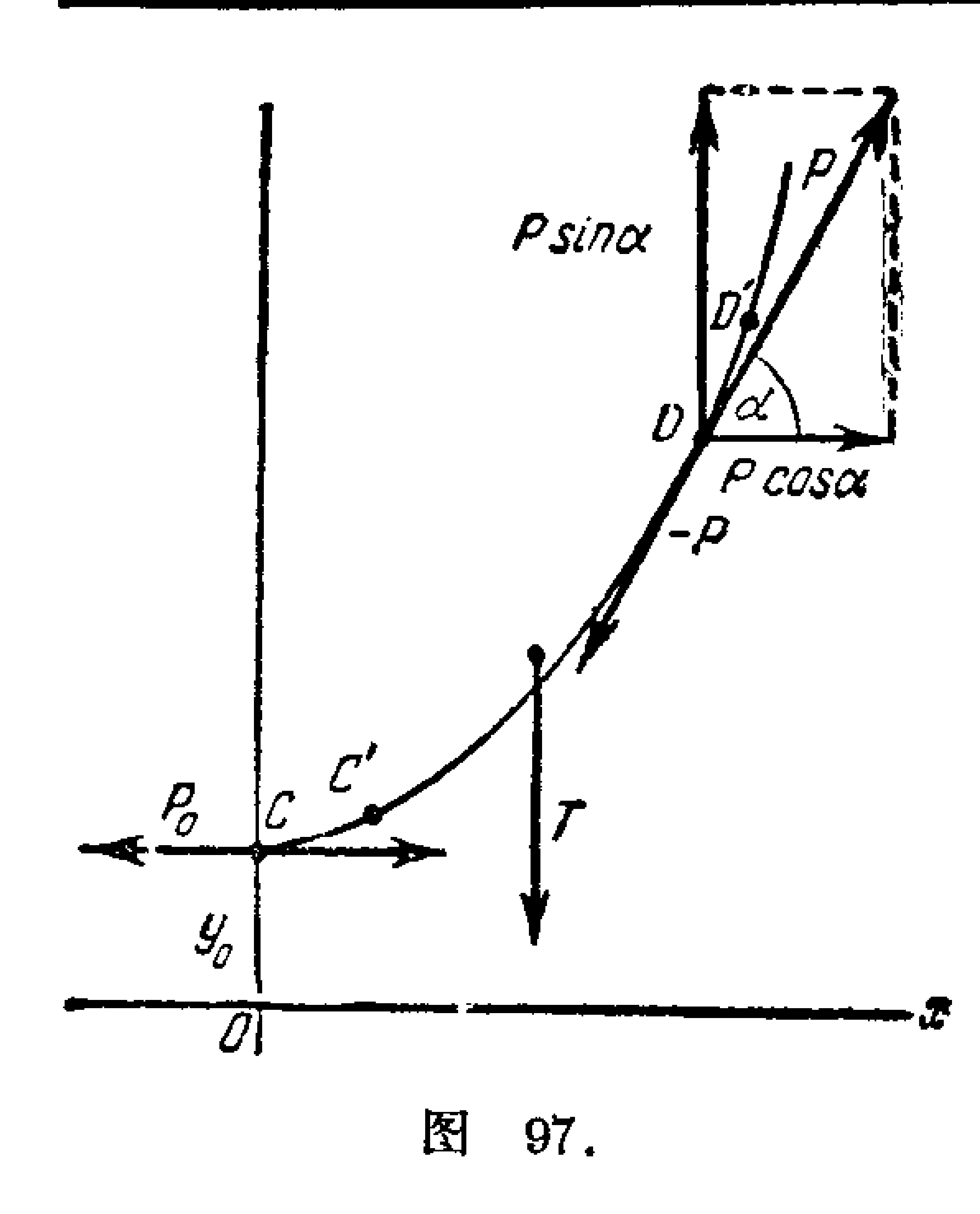


图 97.

子在点 D 的張力，它的方向沿着悬鏈綫在点 D 的切綫（图 97）. 作用在点 C 的力 P_0 的方向沿着悬鏈綫在这一点的切綫，就是說，平行于 x 軸（方向是朝左的）.

作用在鏈子的 $\overset{\frown}{CD}$ 一段上的重力的合力 T，方向平行于 y 軸而向下；長度是 s 的 $\overset{\frown}{CD}$ 段的質量等于 ρs. 从这里就知道 T 的值等于

$$T = g\rho s, \tag{1}$$

这里 g 是重力常数. 力 P 的垂直方向分力朝着上方，并等于 $P\sin\alpha$，而它的水平方向分力朝着右方，并等于 $P\cos\alpha$.

若把悬鏈綫硬化，那它仍旧处在平衡狀态. 作用在悬鏈綫的兩个水平力 P_0 和 $P\cos\alpha$，垂直力 T 和 $P\sin\alpha$，方向各各相反，并且互相抵消，从这里，根据(1)就得到

$$P\sin\alpha = g\rho s, \tag{2}$$

$$P\cos\alpha = P_0. \tag{3}$$

現在，讓鏈子沿着悬鏈綫移动，使得鏈子的每个点描出了一段長 h 的微小的弧. 这样，鏈子移到了位置 $C'D'$. 求把鏈子作这样移动所需要作的功.

加在点 D 的力 P 所作的功等于 Ph；力 P_0 在点 C 所作的功等于 $-P_0h$. 因此，移动鏈子的时候总共所作的功等于

$$R=(P-P_0)h. \tag{4}$$

在原来的位置 $\overset{\frown}{CD}$，鏈子由 $\overset{\frown}{C'D}$ 段再加上一小段 $\overset{\frown}{CC'}$ 組成。在移动后的位置 $\overset{\frown}{C'D'}$，鏈子由同一段 $\overset{\frown}{C'D}$ 再加上一小段 $\overset{\frown}{DD'}$ 組成。兩个加上去的小段 $\overset{\frown}{CC'}$ 和 $\overset{\frown}{DD'}$ 有相等的長度 h，相等的質量 ρh，但 $\overset{\frown}{CC'}$ 的縱坐标是 y_0，而 $\overset{\frown}{DD'}$ 的縱坐标是 y。作功的結果就是原来加上的縱坐标是 y_0 的一段，換成了同样質量但是縱坐标是 y 的一段。由这里就看出，所作的功等于

$$R=g\rho h(y-y_0). \tag{5}$$

由(4)和(5)得出：

$$P-P_0=g\rho(y-y_0)$$

或

$$P-g\rho y=P_0-g\rho y_0. \tag{6}$$

如果把鏈子和它自己平行地沿着 y 軸的方向运动，那它的形狀以及在各点的反作用力 P 都不变。我們把悬鏈綫沿着 y 軸的方向这样移动，使得它的原来縱坐标 y_0 等于

$$y_0=\frac{1}{g\rho}P_0. \tag{7}$$

悬鏈綫这样的位置叫作**标准**位置。下面我們还要作出悬鏈綫标准位置的几何定义。

在这个位置，式(6)化簡成

$$P-g\rho y=0$$

或

$$y=\frac{1}{g\rho}P. \tag{8}$$

处在标准位置的悬鏈綫上各点的張力和点的縱坐标成正比。

由(3)推出：

$$\frac{1}{g\rho} P \cos\alpha = \frac{1}{g\rho} P_0$$

或者，用等式(7)和(8)，就有：

$$y \cos\alpha = y_0. \tag{9}$$

式(9)把悬鏈綫上点的縱坐标和悬鏈綫在这一点的切綫和 x 軸的交角联系了起来。

比較式(9)和折射曲綫方程(見第17节的(3)式)，我們得到：

处在标准位置的悬鏈綫正是在光速和縱坐标成反比($v=\frac{c}{y}$)的媒質里所走的途徑。

2. **悬鏈綫标准位置的几何定义** 由等式(2)和(8)得到：

$$\frac{1}{g\rho} P \sin\alpha = s,$$

并且，

$$s = y \sin\alpha.$$

由这里就得到：

$$y - s = y(1 - \sin\alpha).$$

最后，由(9)我們得到：

$$y - s = y_0 \frac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

用 $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ 来記悬鏈綫切綫和 y 軸的夾角。我們得到：

$$y - s = y_0 \frac{1 - \cos\beta}{\sin\beta} = y_0 \frac{2\sin^2\frac{\beta}{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}} = y_0 \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}. \tag{10}$$

我們来看綫段 DE，它和 y 軸平行，朝着下方，長度等于悬鏈綫 $\overset{\frown}{CD}$ 的弧長 s(图98)。若把弧 $\overset{\frown}{CD}$ 仍旧系牢在点 D，

讓点 C 自由，那弧 $\overset{\frown}{CD}$ 在重力作用下会达到新的平衡位置——垂直的綫段 DE。簡單一些說：鏈子的弧 $\overset{\frown}{CD}$“落”到了位置 DE。垂直綫段 EE_1，長度等于 $y-s$，指示鏈子的“落下”部分的端点 E 距 x 軸有多远。

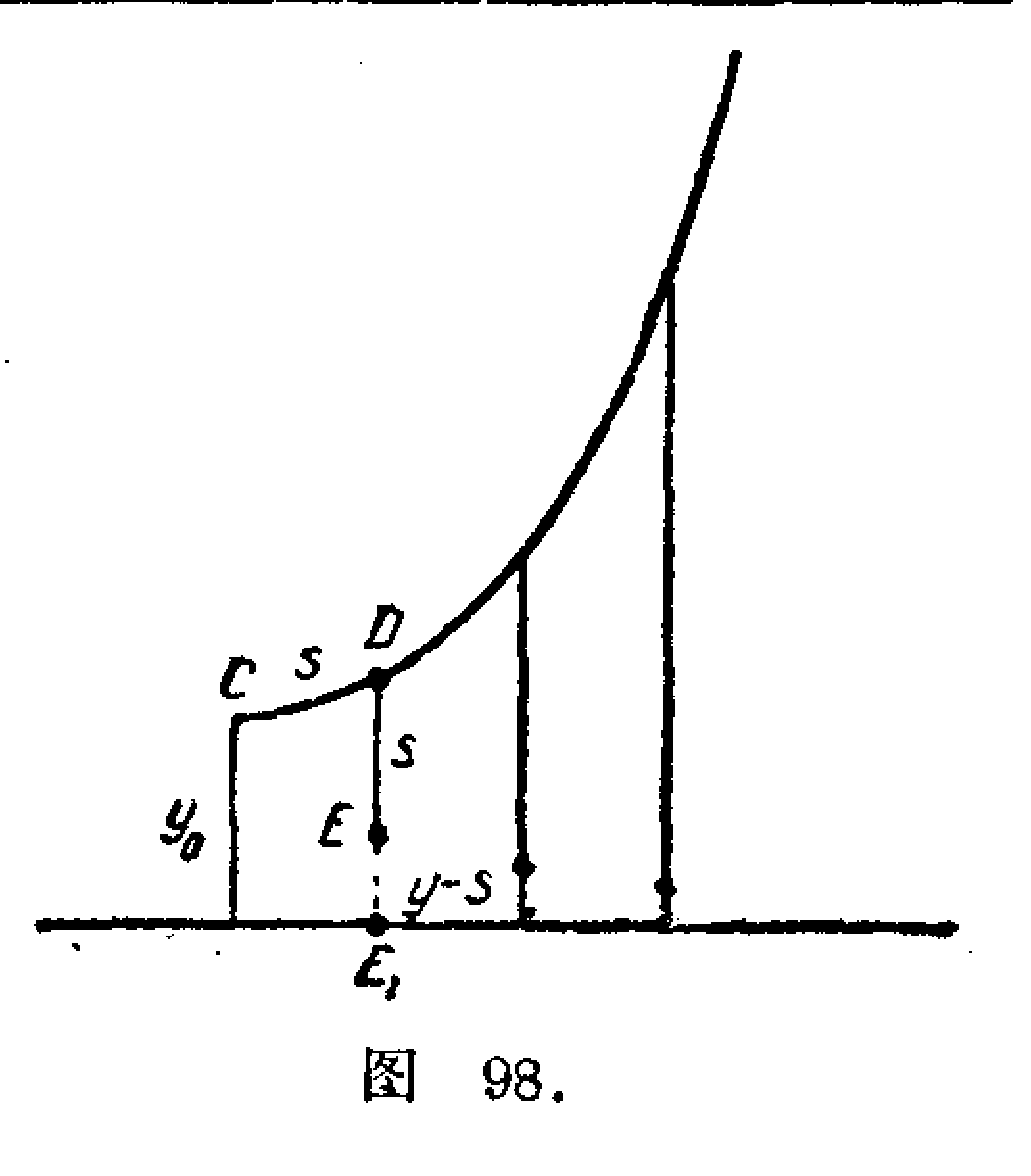


图 98.

由公式(9)得到：

$$\sin\beta=\cos\alpha=\frac{y_0}{y}. \tag{11}$$

設点 D 沿着悬鏈綫无限制地向上跑，它的縱坐标趋于无穷大：

$$y\to\infty.$$

由(11)，这时候 $\sin\beta$ 趋于 0。于是 $\beta\to 0$（在点 D 的切綫和 y 軸的夾角趋于 0）。同时，$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\to 0$，因此由(10)，有：

$$\lim_{y\to\infty}(y-s)=0.$$

当弧 $\overset{\frown}{CD}$ 的端点 D 无限远离的时候，从落下的弧 $\overset{\frown}{CD}$ 的端点 E 到 x 軸的距离趋于 0。

若悬鏈綫处在标准位置，那末 x 軸就是那当落下的弧 DE 的起点 D 无限远离的时候末端 E 所无限接近的一条水平直綫。

这就表达出了悬鏈綫标准位置的特征。

3. 最小回轉曲面 求解下面的問題：

在所有联結給定的兩点 A、B 的平面曲綫 q 当中，找出那把它繞 x 軸回轉所得的回轉曲面側面积最小的曲綫（图 99）.

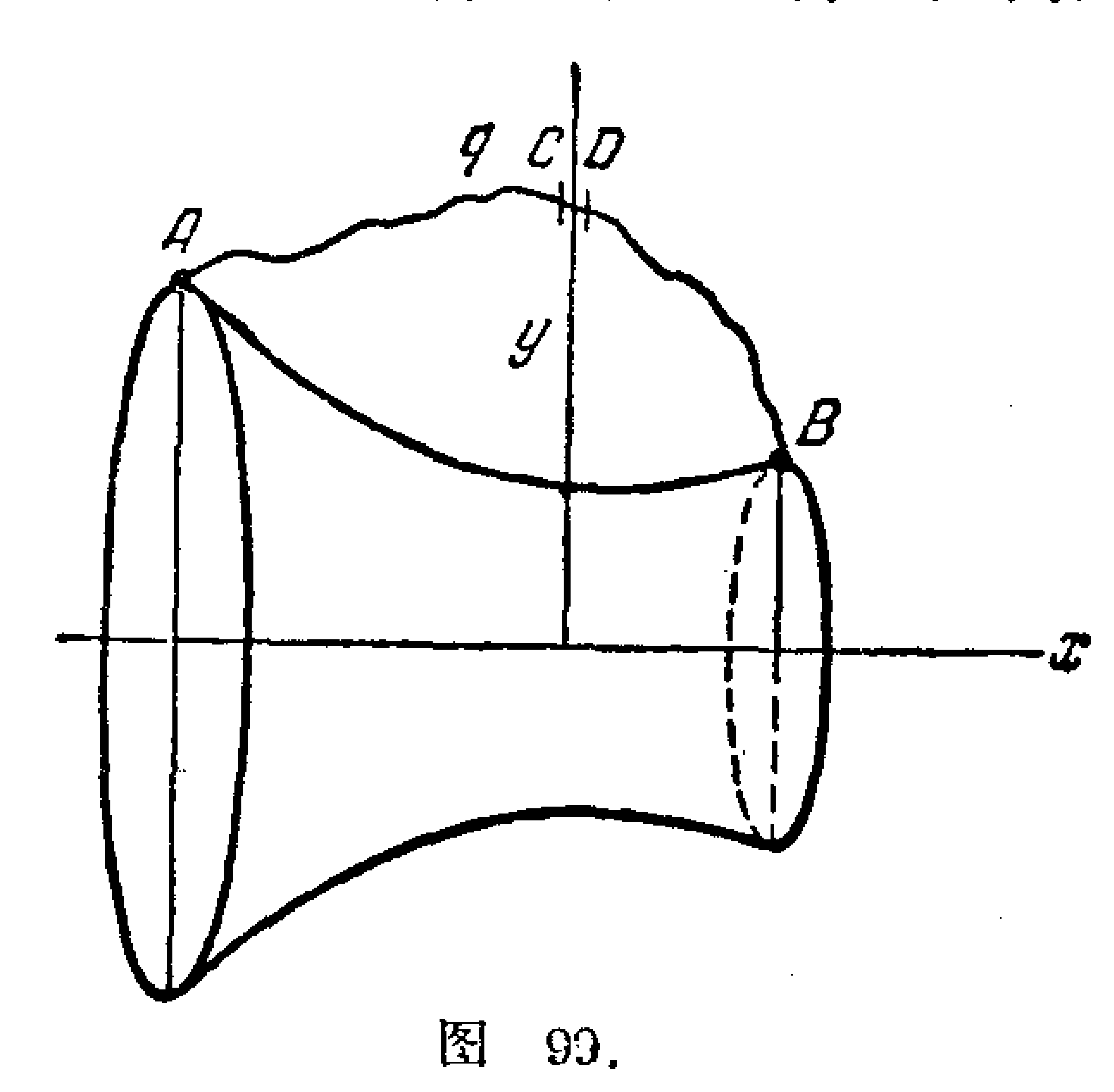


图 99.

用 $V(q)$ 表示把曲綫 q 繞 x 軸回轉所得的回轉曲面的側面积，用 $T(q)$ 表示在光速由公式

$$v=\frac{1}{2\pi y} \qquad (12)$$

来决定的媒質里，曲綫 q 的光学長度.

我們来証明这兩个量的相等：

$$V(q)=T(q).$$

設 $\breve{CD}$ 是曲綫 q 上長度是 h 的一段微小的弧。先証明

$$V(\breve{CD})=T(\breve{CD}). \qquad (13)$$

把 $\breve{CD}$ 看作微小的直綫段，并用 y 来記 $\breve{CD}$ 的重心的縱坐标，我們得到：回轉曲面側面积 $V(\breve{CD})$ 等于一个截头圓錐的側面积，这个截头圓錐的母綫長 h，中腰截面半徑等于 y. 由这里就得到

$$V(\breve{CD})=2\pi yh.$$

另一方面，如果光速 v 在这微小綫段的中点等于（因此，在整个綫段都大致等于）$\frac{1}{2\pi y}$，那末这微小綫段的光学長度 $T(\breve{CD})$ 等于

$$T(\overset{\frown}{CD}) = \frac{h}{\frac{1}{2\pi y}} = 2\pi yh,$$

就是說，我們得到了等式(13)．

光学長度 T 和回轉曲面側面积 V 的相等关系既然对于曲綫 q 的微小綫段已經建立起来了，那就可以推出这个相等关系对于整个曲綫 q 也成立．因此，如果对于某条曲綫 q，$V(q)$ 达到最小值，那末对于同一条曲綫，光学長度 $T(q)$ 也达到最小值．按費馬原理，曲綫 q 是在我們的光学媒質里联結点 A 和 B 的光綫的途徑．而在我們这光学媒質里，光綫途徑的形狀是悬鏈綫(处在标准位置)．

所以，在所有联結点 A 和 B 的曲綫 q 当中，悬鏈綫 $\overset{\frown}{AB}$ (处在标准位置) 是繞着 x 軸回轉所得的回轉曲面側面积 $V(q)$ 最小的一条．

4. 極小曲面 和我們所解决的关于联結給定的兩点的最短綫的問題相仿的，可以提出关于绷紧在給定的曲綫上(就是用給定的曲綫作它的边界)的最小曲面問題，这样的曲面就是所謂极小曲面．

如果曲綫 r 是平面曲綫，那它所包圍的一块平面 Q 就是绷紧在曲綫 r 上的极小曲面．

如果曲綫 r 不是平面曲綫，那极小曲面就不会是平面的一部分．

把点 A 和 B 繞着 x 軸轉，产生了兩个圓 r_1 和 r_2，这兩个圓是在和这軸垂直的平面里，圓心就在軸上．由联結这兩点的悬鏈綫 $\overset{\frown}{AB}$ 回轉所得的回轉曲面是绷紧在圓 r_1 和 r_2 上的

极小曲面.

5. 关于最小回轉曲面的等周問題 我們来解一个更复杂的問題:在所有長度一定(等于 l)的联結点 A 和 B 的曲綫当中,找出一条繞着軸回轉所得的回轉曲面側面积最小的. 我們把回轉軸 LL_1 看作是水平的(图 100).

用長度等于給定的長度 l_0 的鏈子联結点 A 和 B. 它就会取一条悬鏈綫 $\overset{\frown}{AB}$ 的形狀,長度等于 l_0. 选取水平直綫 MM_1 (平行于回轉軸 LL_1) 作 x 軸, 使得悬鏈綫 $\overset{\frown}{AB}$ 对这条軸来說是处在标準位置.

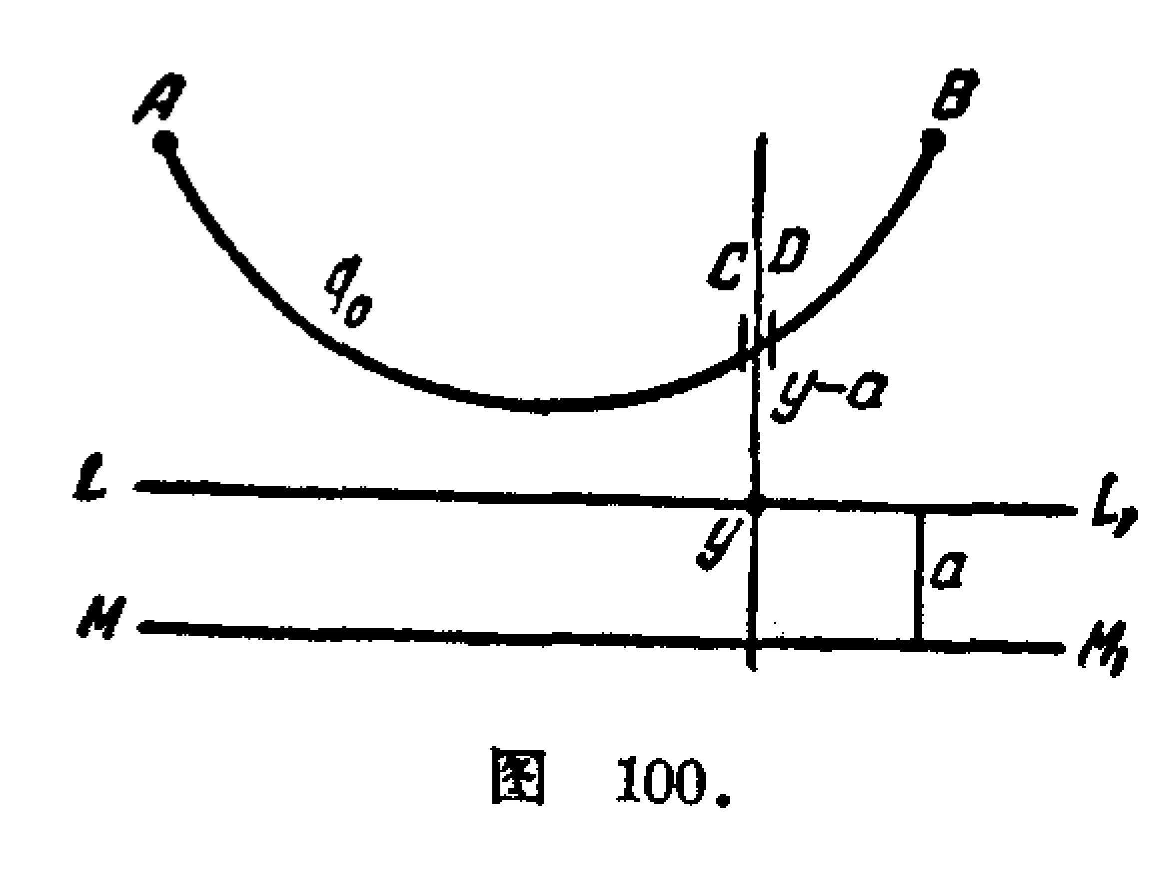


图 100.

用 $V_1(q)$ 記曲綫 q 繞 x 軸(軸 MM_1)回轉所产生的側面积, 用 $V(q)$ 表示曲綫 q 繞軸 LL_1 所得的; $l(q)$ 表示曲綫 q 的長度. 若 a 是軸 LL_1 和軸 MM_1 之間的距离, 那末

$$V(q)=V_1(q)-2\pi al(q). \tag{14}$$

事实上, 設 $\overset{\frown}{CD}$ 是曲綫 q 上長度是 h 的一段微小的弧. 若 y 是 $\overset{\frown}{CD}$ 的中点到軸 MM_1 的距离, 那末 $(y-a)$ 是这个中点到軸 LL_1 的距离. 長度 $l(\overset{\frown}{CD})=h$. 并且,

$$V_1(\overset{\frown}{CD})=2\pi hy, \quad V(\overset{\frown}{CD})=2\pi h(y-a).$$

因为
$$2\pi h(y-a)=2\pi hy-2\pi ah,$$

所以
$$V(\overset{\frown}{CD})=V_1(\overset{\frown}{CD})-2\pi al(\overset{\frown}{CD}). \tag{15}$$

所以, 公式 (14) 对于曲綫 q 上任何一段微小的弧来說是眞确的. 可知它对于整个曲綫 q 也是眞确的.

我們所要討論的是長度是 l_0 而联結点 A 和 B 的曲綫 $\bar{q}$. 对于这些曲綫来說，

$$V(\bar{q})=V_1(\bar{q})-2\pi l_0 a,$$

也就是，对于它們来說，$V(\bar{q})$ 和 $V_1(\bar{q})$ 的值相差一个常数 $2\pi l_0 a$. 因此，这兩个数量在同一条曲綫 q_0 上达到它們的极小值. 在所有联結点 A 和 B 的曲綫当中，在这里特别指長度等于 l_0 的曲綫 q_0 当中，对 x 軸来說处在标准位置的悬鏈綫 q_0 的 $V_1(q)$ 值最小，也就是繞着 x 軸回轉而得的側面积最小.

因此，在所有联結点 A 和 B、長度等于 l_0 的曲綫 $\bar{q}$ 当中，仍旧是悬鏈綫給出 $V(\bar{q})$ 的极小值.

悬鏈綫的这个性質可以用另外的方式証明.

考虑联結点 A 和 B 并且有某給定長度的所有曲綫 $\bar{q}$ 所形成的总体. 每一条这样的曲綫可以看作一条密度是 ρ 的均匀重鏈的某个位置. 重鏈在位置 $\bar{q}$ 的位能我們記作 $U(\bar{q})$. 当 $\bar{q}=q_0$ 是悬鏈綫的时候，$U(\bar{q})$ 达到极小值.

事实上，由狄利赫萊原理(見第13节)，使 $U(\bar{q})$ 达到最小值的曲綫 q_0 是鏈子平衡时候的位置.

取水平直綫 MM_1 作 x 軸，并假設密度 ρ 等于 2π. 把这条直綫取作 $U=0$ 的直綫. 若鏈子上長 h 的微小的弧 $\smile{CD}$ 的中点的縱坐标是 y (图100)，那末

$$U(\smile{CD})=\rho hy=2\pi hy.$$

同时，这一段微小的弧 $\smile{CD}$ 繞着軸 MM_1 (x 軸) 回轉所得的回轉曲面側面积 $V(\smile{CD})$ 等于

$$V(\smile{CD})=2\pi hy.$$

由这里就推出

$$U(\overset{\smile}{CD})=V(\overset{\smile}{CD}),$$

于是我們可以得到等式

$$U(q)=V(q).$$

事实上，由已經証明的对于曲綫 q 上任意的微小部分，数量 U 和 V 的相等，就立刻推出，对于整个曲綫 q 来說，这兩个量也是相等的。既然在所有联結点 A 和 B 的有給定的長度 l 的曲綫 $\bar{q}$ 当中，悬鏈綫的 $U(\bar{q})$ 有极小值，因此，它也是在这些曲綫当中 $V(\bar{q})$ 有极小值的曲綫。

随着曲綫变动的数量叫作汎函数。例如数量 $l(q)$、$V(q)$、$T(q)$、$U(q)$ 等都是汎函数。

雅各·伯努利第一个考虑了这样的問題：

在有給定長度的所有曲綫当中，找出使得某个汎函数 $J(q)$ 达到极大值或极小值的曲綫。他把这一类問題叫作等周問題。在第 15 节所考虑的是这个問題的一个特例，有时也叫作狹义等周問題。我們現在所考虑的是等周問題的另一例。

二〇　力学和光学之間的关联

考虑在某个平面場（有力作用的媒質）里点的运动，設在这个場里力学上的能量守恆定律成立：

$$U+T=c, \tag{1}$$

这里 $U=U(x,y)$ 是动点的位能，T 是它的动能，c 是总能量（在运动的每一时刻都保持不变）。設点的質量等于 1，那我們就有：

$$T=\frac{w^2}{2},$$

这里 w 是点的速度. 由这里以及由(1)就推出:

$$w=\sqrt{2T}=\sqrt{2(c-U)}=\sqrt{2[c-U(x,y)]}. \qquad (2)$$

我們考虑所有可能的軌道,就是在給定总能量 c 不变的情况下点所描出的途徑. 由公式(2)可以看出,动点的速度 w 完全由动点的坐标 x、y 所决定,也就是說,由动点所在的位置来决定.

例如,对于在重力場里的运动来說,$U=gy$,这里 g 是重力常数,y 是方向朝下的縱坐标,由公式(2)就得到

$$w=\sqrt{2(c-gy)}=\sqrt{c_1-c_2y}\ \ (c_1=2c, c_2=2g). \qquad (3)$$

我們又考虑某一种光学媒質,設在这种媒質里光速 v 等于力学速度 w 的倒数:

$$v=v(x,y)=\frac{1}{w(x,y)}. \qquad (4)$$

在光速是 $v=\frac{1}{w}$ 的媒質里,光綫和速度是 $w=w(x,y)$ 的点作力学运动的时候所描出的軌道是一样的.

这就是哈密尔頓所建立的光学和力学間的类似性.

例如,我們知道在速度由公式(3)表示的重力場里,点的运动軌道是抛物綫;因此,在光速是 $v=\frac{1}{\sqrt{c_1-c_2y}}$ 的媒質里,光綫走的途徑也是抛物綫.

我們知道,在光速和 y、$\frac{1}{y}$、$\sqrt{y}$ 成正比的媒質里,光綫走的途徑分別是中心在 x 軸上的半圓、悬鏈綫、旋輪綫. 这些曲綫也就是速度分别和 $\frac{1}{y}$、y、$\frac{1}{\sqrt{y}}$ 成正比的点作力学运动

的时候所描出的軌道.

为了要証明上面所說的命題，首先注意在一个場里，力是朝着等位綫的法綫的方向作用的(等位綫就是位能等于常数的曲綫：

$$U(x,y)=\text{常数}),$$

它的方向朝着这种綫的位能比較小的一側 (由 (2)，在等位綫上，速度 $w=w(x,y)$ 也是常数). 引一系互相接近的等位綫.

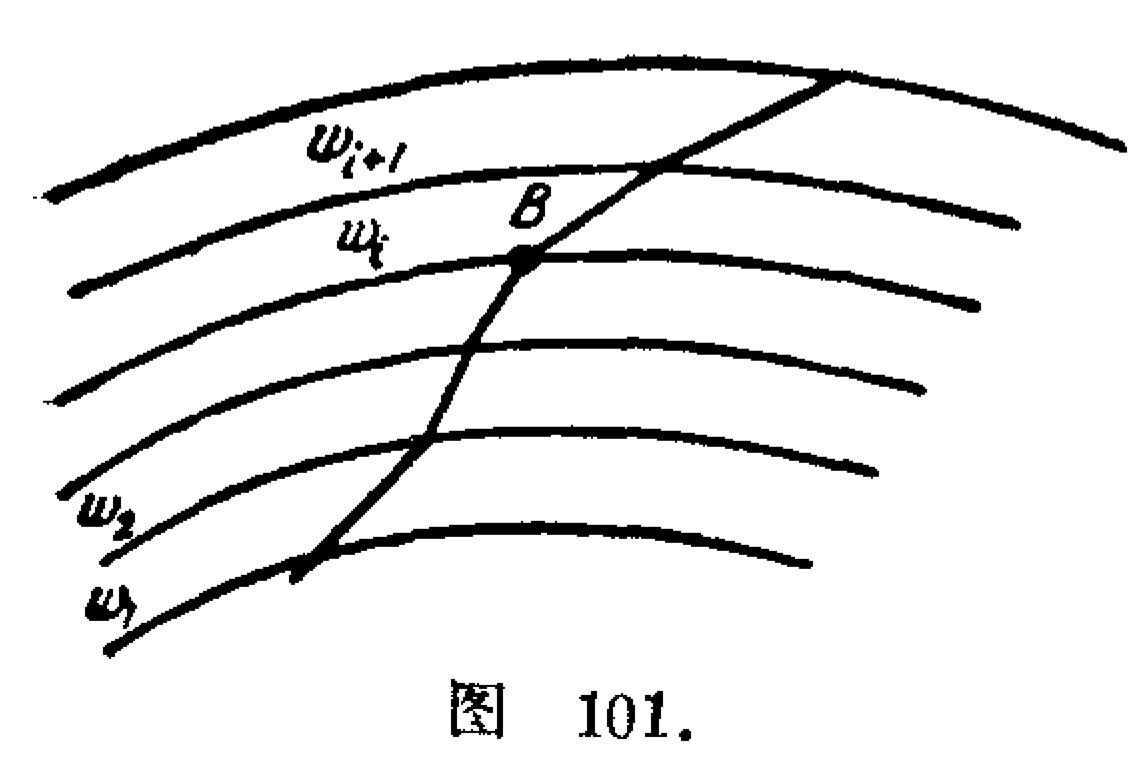


图 101.

在每一条这样的等位綫上速度 w 等于常数，而在兩条相鄰等位綫之間的帶形里，速度連續地变动. 在图 101 里，用 w_1、w_2……w_i、w_{i+1}……来标出这些曲綫，在这些曲綫上面，速度分别等于 w_1、w_2……w_i、w_{i+1}……

現在用另一个运动来代替我們原来的. 設在标記着 w_i 和 w_{i+1} 的兩条曲綫間的帶形里保持速度 w_i 不变，而在穿过标記着 w_{i+1} 的曲綫的时候，速度有一个跳跃性的变动. 我們把原来的速度变化情况变动了一下. 但是，如果每相鄰兩条分界綫距离越近(帶形越窄)，速度跳跃的間距越小，那末速度跳跃性的变化和原来的連續变化情况越接近；原来的速度变化情况就可以看作当帶形的寬度趋于零的时候跳跃性变化情况的极限.

对于速度的跳跃性变化情况来說，作用力 (垂直于曲綫 $w=$ 常数的) 并不是連續的，而是沿着分界綫的法綫方向的冲

力，产生速度的跳跃。

在每条帶形里面却沒有力作用，运动是直綫的．因此运动的軌道是折綫，頂点在各分界綫上．現在我們考虑这样的折綫軌道上的一段 CBD（图 102）．在綫段 CB 上速度等于 w_{i-1}，方向沿着这个綫段．

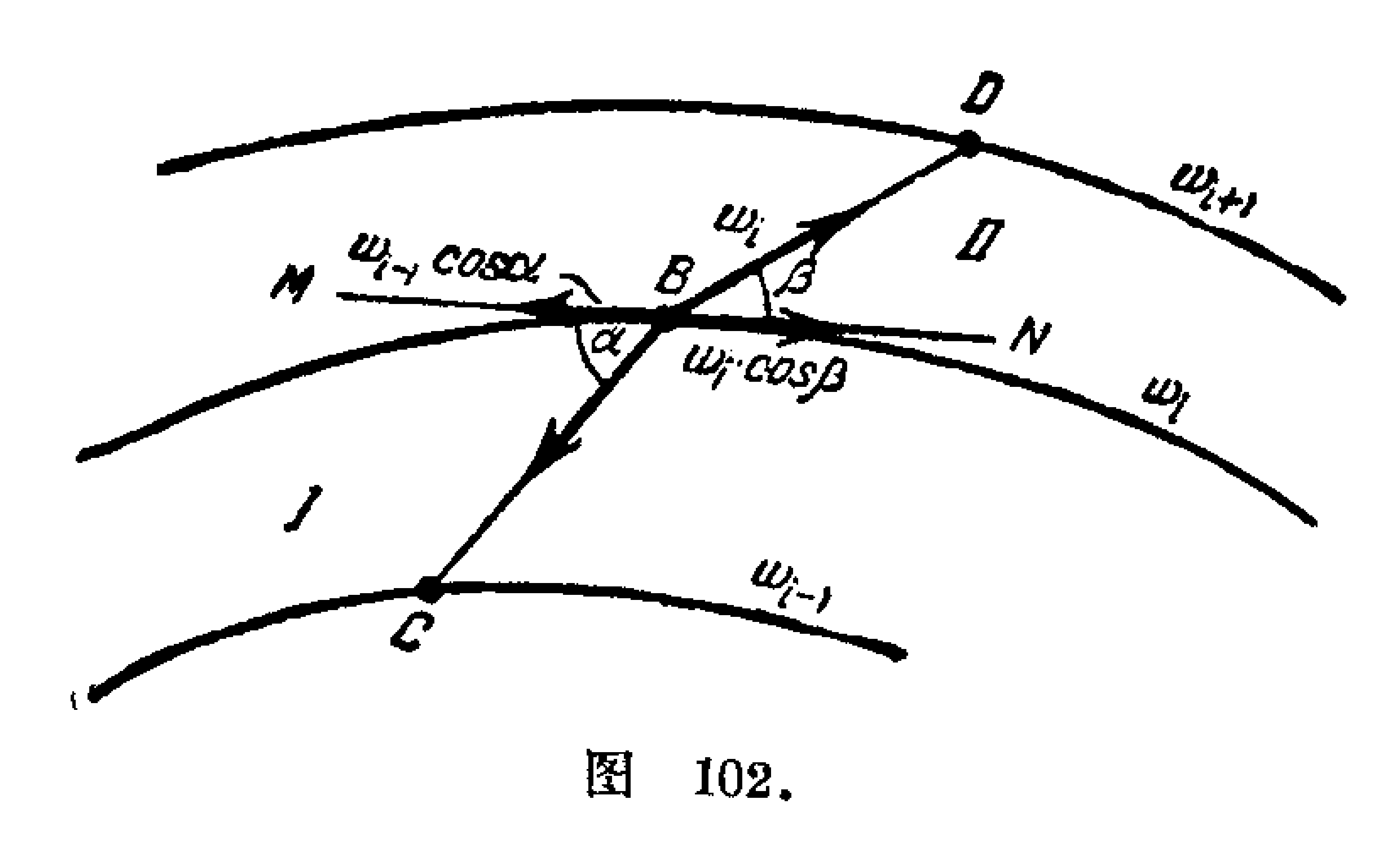


图　102.

在点 B 引分界綫的切綫 MN，用 α 和 β 来記綫段 CB、BD 和这条切綫的交角．在点 B 的切綫方向分速度，在轉折以前的和以后的，分别等于 $w_{i-1}\cos\alpha$ 和 $w_i\cos\beta$．既然冲力的方向是沿着分界綫在点 B 的法綫的，所以它不改变切綫方向的分速度，

$$w_{i-1}\cos\alpha = w_i\cos\beta. \qquad (5)$$

公式(5)表达出軌道穿过分界綫时候的轉折規律．

現在考虑某一种光学媒質，在这里面光速等于力学运动速度的倒数 $v=\frac{1}{w}$，就是說，在我們相鄰的帶形 I 和 II 里，光速分别等于 $v_{i-1}=\frac{1}{w_{i-1}}$，$v_i=\frac{1}{w_i}$．由光綫的折射律，在点$B$有：

$$\frac{\cos\alpha}{v_{i-1}}=\frac{\cos\beta}{v_i}$$

或 $$w_{i-1}\cos\alpha = w_i\cos\beta.$$

所以，在我們这种光学媒質里，光綫的轉折就同力学軌道的轉折一样；光綫走的途徑和力学运动的軌道都是折綫，同时并且同样地轉折，就是說，在第 i 条帶形里有速度 w_i 的运动軌道和在同一条帶形里有光速 $v_i=\frac{1}{w_i}$ 的光綫走的途徑完全重合。对于速度跳跃性变化的媒質，我們的命題就証明了。

在极限情形，当帶形的寬度趋于0的时候，当我們得到了速度是 $w=w(x,y)$ 的力学場和光速是 $v=v(x,y)=\frac{1}{w(x,y)}$ 的光学媒質的时候，互相重合的折綫运动軌道和光綫途徑也过渡到互相重合的曲綫运动軌道和光綫途徑。

哈密尔頓所指出的光学和力学之間的关联在近代物理学里起着极其重要的作用。

最后我們指出，解决寻求汎函数极大极小問題的一般方法是一門叫作变分学的数学所討論的对象。这門数学的基础是十八世紀的大数学家歐拉和拉格蘭日所奠定的。